

Georges PAPY

**Géométrie
des nombres complexes
et des fonctions circulaires**

Centre belge de pédagogie de la mathématique

Bruxelles

1996

Géométrie des nombres complexes et des fonctions circulaires

Table des matières

- 1 *Grises sont toutes les théories, seul vert l'arbre d'or de la vie*
- 2 Réalité rectiligne - Imaginaire plan
- 3 Le plan imaginaire numérise la réalité rectiligne - Georges Lemaître
- 4 L'arbre hexadécimal
- 5 Minicomputer chiffre le cadran horaire usuel
- 6 Numérisation du cercle des angles
- 7 Minicomputer numérise des douzièmes de tour
- 8 Le binaire ami des bissectrices
Le Plan de Gauss s'anime additivement par ses translations
- 9 $\mathbb{R}, +, \leq, \mathbb{C}, +$
- 10 Simon Stévin et Galilée
- 11 Points fixes - Similitudes
- 12 Similitudes ou échelles tournantes
- 13 La multiplication des nombres complexes
- 14 Le champ complexe
- 15 Radar
- 16 L'inversion des nombres complexes
- 17 Conjugaison
- 18 Le Vierergruppe de Klein, hymne national au Pays des nombres complexes

- 19 Fonctions circulaires
- 20 Le sinus héritier du concept de demi-corde d'arc double
- 21 Le tour du *sinus*
- 22 Signe et variation de la fonction sinus
- 23 Cocirc
- 24 Signe et variation de la fonction cosinus
- 25 Fonctions circulaires et addition des angles
- 26 La fonction cosécante

- 27 Du plan de Gauss à la sphère de Riemann

- 28 La sphère de Riemann
- 29 De cos-en-Gauss à cos-en-Riemann
- 30 En le repère cartésien tridimensionnel adopté
- 31 Cosinusoïde-en-Riemann
- 32 Preuve
- 33 Preuve
- 34 Le cône des cosinus
- 35 Tour penchée des cosinus
- 36 Où la bissection des angles invite au binaire
- 37 Pythagore et Descartes, les échelles qui conduisent du cercle aux ellipses
- 38 Du jardinier à Descartes. Foyers d'ellipse
- 39 Preuve
- 40 Le cône compact des cosinus
- 41 $\sin 2 \cos 2 \sin 1 \cos 1$
- 42 Calcul de l'axe de bout de la base du cône compact des cosinus
- 43 Caractéristiques du cône compact des cosinus
- 44 Tangente et cotangente (et notamment la tangente d'une somme angulaire)
- 45 $Tg 1 \quad tg 2 \quad tg 3 \quad tg 0$
- 46 $Tg 1$ mise en idées visuelles
- 47 Excentricité de la base du cône compact des cosinus
- 48 Sinus-en-Riemann
- 49 Cosécante-en-Riemann
- 50 Réponse et commentaire
- 51 Sécante
- 52 Quadrille dansé par $\sin \cos \sec$ et \csc sur l'air du *Vierergruppe de Klein*

- 53 *Intermezzo*

- 54 Les deux moitiés d'un angle ont même tangente
- 55 Le cirque angulonumérique Γ, \bar{R}
- 56 En Γ, \bar{R} prolongement de la définition de la tangente en 4 et 12
- 57 Preuve
- 58 Vue panoramique du cirque angulonumérique Γ, \bar{R}
- 59 Quarts de tour à droite en le cirque Γ, \bar{R}
- 60 Addition angulaire, rotation, multiplication complexe, homographie réelle en Γ, \bar{R}
- 61 Preuve dessinée

Préface

Par son infatigable dévouement à la tâche, sa grande compréhension d'autrui, son intelligence à dénouer les fils entremêlés des situations sociales, psychologiques, pédagogiques, scientifiques et mathématiques les plus diverses, Frère Candido Roberto Sitia a largement contribué à faire de l'Italie en général, de l'Istituto Filipin et du Centro Ugo Morin en particulier, de hauts lieux d'éducation humaniste et mathématique.

Le présent *hommage d'un géomètre à un ami physicien* a subi l'épreuve du feu: en Colombie, en deux cours de 20 heures à 180 élèves du Colegio Refous Roland Jeangros (Bogota); en Belgique, lors de séminaires réunissant mathématiciens, physiciens, enseignants et psychologues. Le lecteur averti percevra d'emblée tout ce que ce texte doit aux uns et aux autres.

Le rôle des fonctions circulaires dans les formules de la physique et leur intimité avec les nombres complexes motivent le choix du thème retenu. L'hommage se veut de pure géométrie euclidienne, rigoureusement intuitive. Certains de ses résultats majeurs se concrétisent en objets géométriques compacts de la géométrie des *Éléments*. Ce texte aura au moins le mérite de refléter une part de ce que mes élèves et collègues m'ont permis d'apprendre sur la psychologie interne du sujet.

L'exposé se développe, page après page, comme les motifs successifs d'une symphonie en soutiennent le déroulement, avec des échos, des rappels, des dialogues et des métamorphoses. Chaque page est une autre page qui s'adresse d'abord au lecteur, supposé *méditatif, imaginatif et actif* ... La page suivante compte sur l'existence d'une réaction personnelle du lecteur à certaines des pages antérieures. Le sommaire placé en tête de l'exposé permet de retrouver un passage antérieur apte à nourrir une situation nouvelle.

Le prérequis est de pure culture mathématique fondamentale indépendante de toute tendance d'école.

Il était une fois un plan nommé *plan de Gauss*
 comprenant le point zéro noté O
 contenant la *demi-droite des normes* d'origine O
 et le *cercle des angles*, zérocentré de rayon 1 .
 Leur point d'intersection est le nombre 1 .

Georges Papy

Géométrie des nombres complexes et des fonctions circulaires

PAR GEORGES PAPY

Grises sont toutes les théories, seul vert l'arbre d'or de la vie

La fin de la première guerre mondiale ouvrit le ciel à l'aviation civile. Dans les années vingt, en vue de son enculturation, s'organisèrent un peu partout des *baptêmes de l'air*, très brefs survols de paysages familiers. À un garçonnet qui lui demandait ce qui, au cours de son raid l'avait le plus saisi, un de ces nouveaux baptisés répondit: "À peine installé, le temps de te demander où mettre ton petit sac contre le mal de l'air, et tu te trouves de l'autre côté de la ville... Là, tout à coup, l'avion fait une chandelle vers le ciel, et tout couché tu vois par le hublot la Porte de Hal qui s'aplatit sur le sol."

L'altitude atténue le relief ... jusqu'à l'effacement.

La prairie qu'elle perçoit chaque jour rampante à ses pieds, trouble la dame du 24-ème étage quand, d'une fenêtre du 10-ème, elle la surprend qui relève la tête!

Dans la catégorie des *choses fades et insipides*, Anatole France range pêle-mêle le lit sans oreiller, le conte sans amour, la femme sans poitrine, le boudin sans moutarde, toutes situations sans relief, au sens propre ou figuré. La fleur sur fond de verdure attire l'insecte qui la féconde en la lutinant.

Une pomme se fit ainsi cueillir par Ève .

La Mignon de Goethe —comme plus tard l'Emma de Flaubert— s'ennuie du confort sans relief que lui offre Wilhelm Meister : "*Connais-tu le pays où les citrons fleurissent, où en l'obscur feuillage brûlent les oranges d'or?*".

Méphisto confie à Faust "*Grises, cher ami, sont toutes les théories, seul est vert l'arbre d'or de la vie*".

Ce que, face aux difficultés du pouvoir, Lénine, traduira :

"Seule est verte la théorie : ses applications sont toujours grises."

Une grise austérité prive l'éducation mathématique du relief dont l'attrait régit la vie.

L'accueil d'une certaine persistance du contraste entre le réel et l'imaginaire la pare des séductions du relief.

Réalité rectiligne

Notre *réalité rectiligne* sera la *demi-droite ordonnée des rayons* [ou normes ou valeurs absolues] \mathbb{R}^+, \leq avec son *mètre* d'origine 0, d'extrémité 1



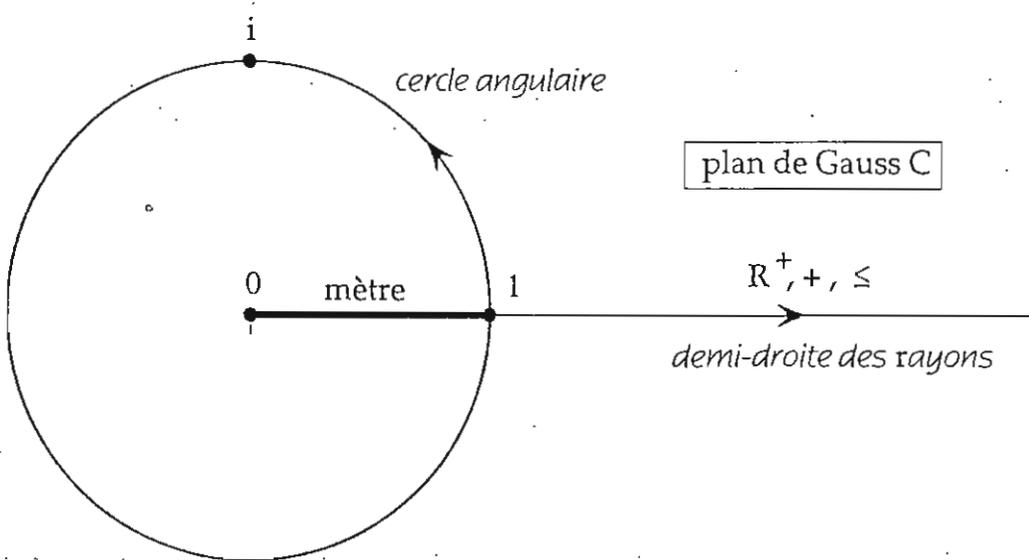
qui assure la mesure des grandeurs non orientées.

Peut-être le souvenir attendri de ta longue et rectiligne rue natale.

Imaginaire plan

Adjacent à ta rue natale, s'ouvre ton monde imaginaire. Notre *imaginaire plan* sera le reste du plan de la feuille où se trouve dessinée notre réalité rectiligne: De manière plus complète, le *plan de Gauss*, [1777-1855] est ce secourable plan euclidien orienté \mathbb{C} de centre 0, de *mètre* 01, accepté avec —en substructure— une certaine géométrie élémentaire, naïve, spontanée, souriante et court vêtue. Les deux figures de cette page présentent les premiers éléments propres à la *conscience imaginaire plane*.

Son *cercle angulaire* Γ , centré en 0, passe par 1 et culmine en l'*unité imaginaire* i .



Les éléments de \mathbb{R}^+ sont les *rayons* ou *normes* ou nombres *réels positifs*, accueillis avec leurs opérations.

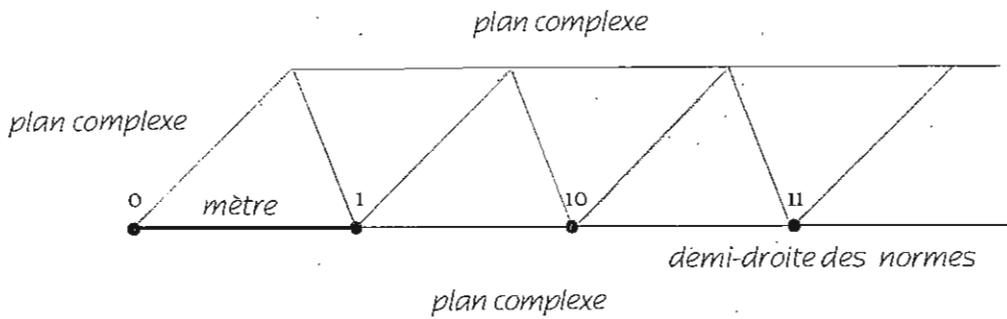
Ceux de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ sont les nombres *réels négatifs* et les nombres *imaginaires*.

Les éléments de \mathbb{C} sont les nombres *complexes*.

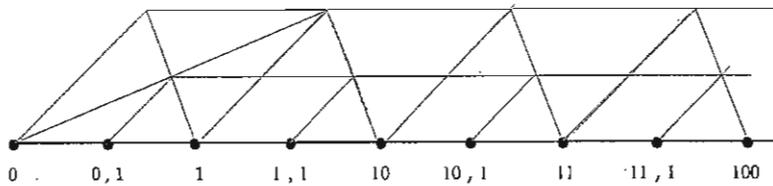
Le *zéro* 0, l'*unité* 1 et le *phare imaginaire* i , déjà nommés individuellement, invitent à montrer comment nommer les autres nombres complexes, chacun par un *numéral* au moins.

Le plan imaginaire numérise la réalité rectiligne

Rien qu'en menant des parallèles, la structure affine du plan imaginaire *gradue* la réalité rectiligne, en utilisant le binaire de LEIBNIZ (1646 -1716)



... la *sous-gradue* grâce à la virgule de Simon STEVIN (1548 - 1620)



et achève la numérisation de la demi-droite des normes en recourant aux binaires illimités¹.

Georges Lemaître

Presque tous les calculs de l'humanité actuelle sont effectués par l'ordinateur en son binaire originel. Celui-ci affleure en programmation informatique, via la notation alphanumérique hexadécimale, qui inspira, en cascade, les chiffres de Georges LEMAÎTRE (1894 - 1966) et ceux de MINICOMPUTER².

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

Première ligne en décimal usuel.

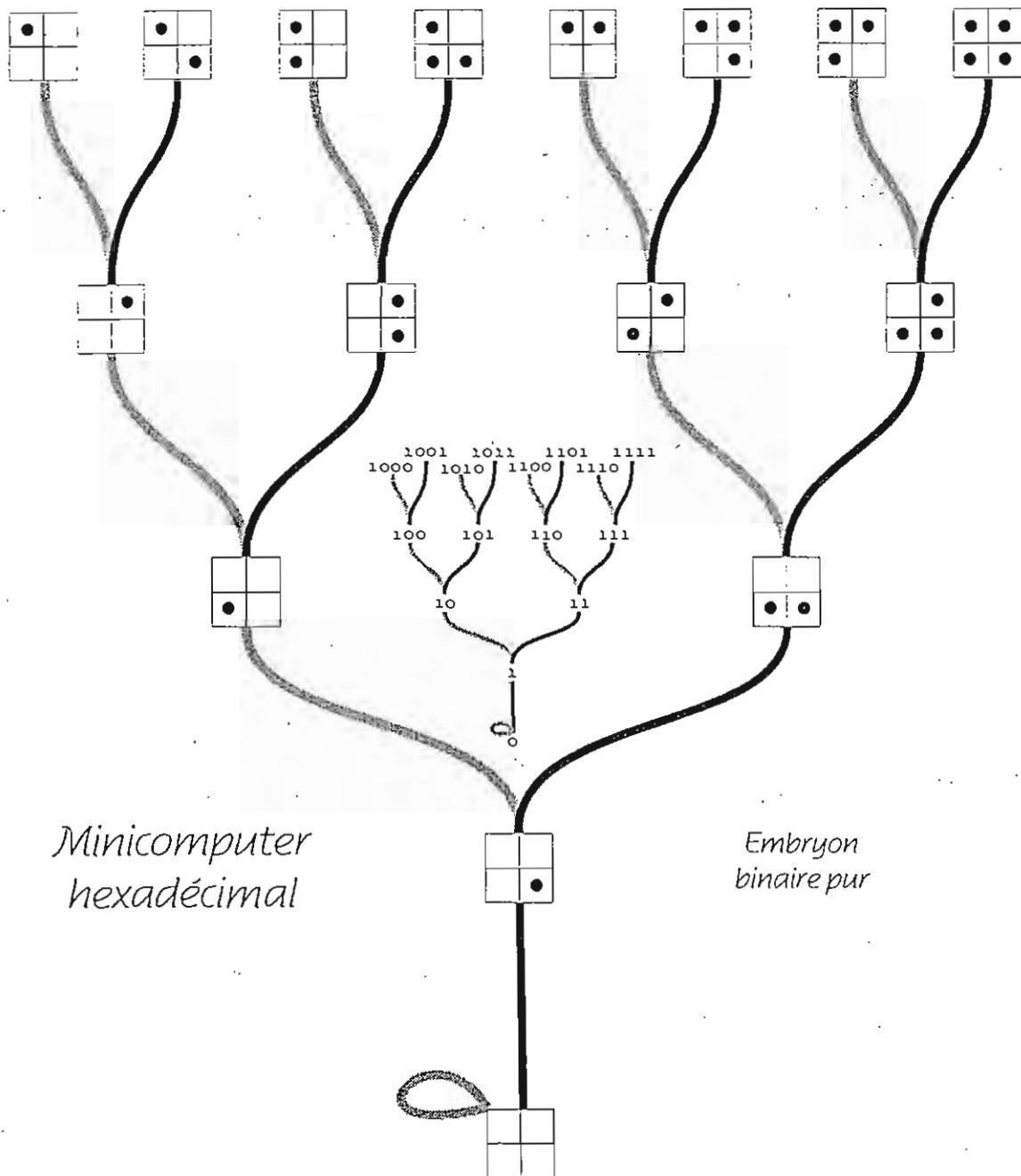
Deuxième en Minicomputer.

Troisième en alphanumérique hexadécimal classique.

¹ PAPY Mathématique Moderne 2 1965 Didier Paris .

² LEMAÎTRE Pourquoi de nouveaux chiffres? Revue des questions scientifiques Nauwelaerts Louvain 1955

PAPY Minicomputer IVAC Bruxelles 1969



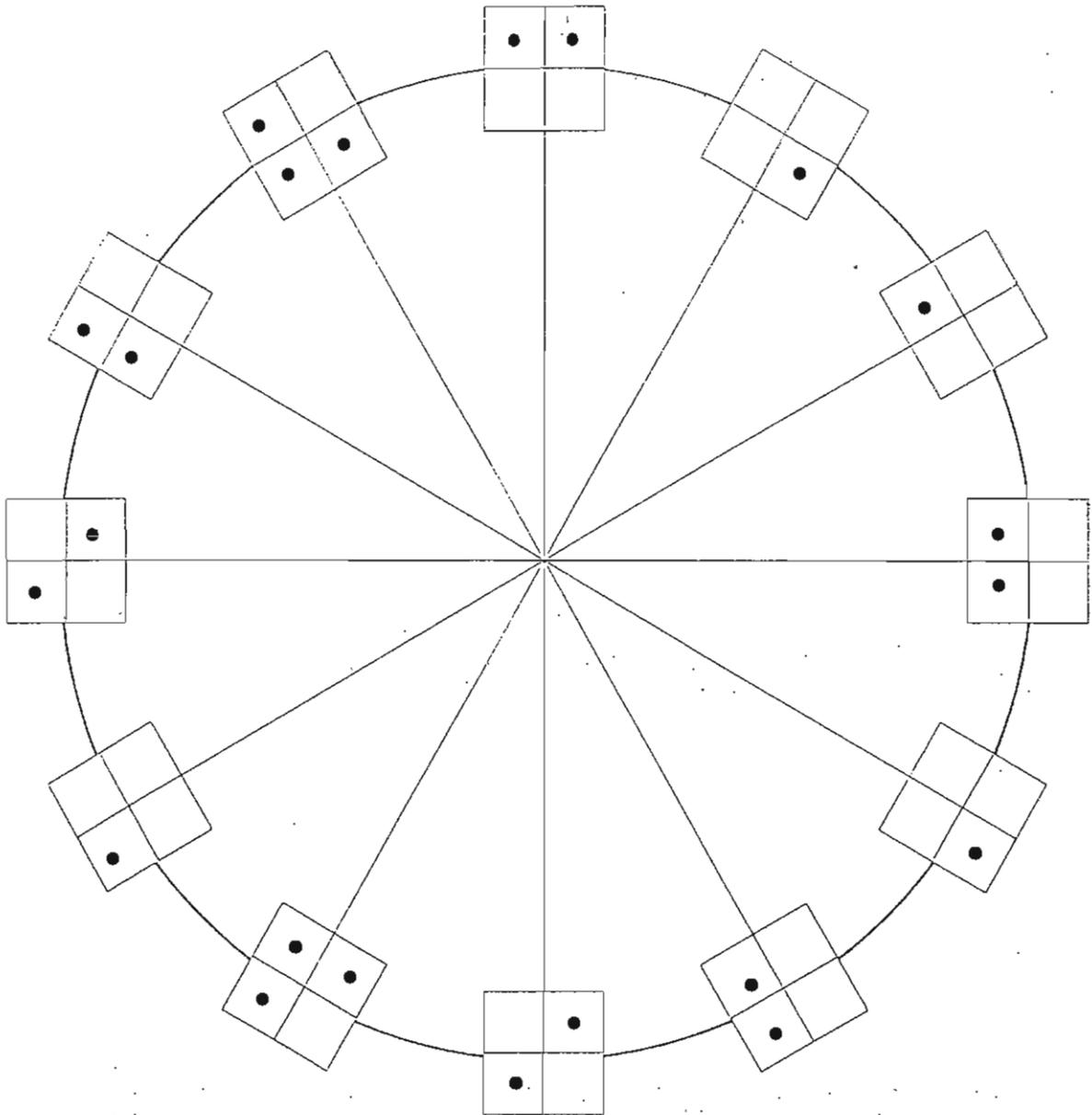
Comme la sève monte en l'arbre des lumières, ses flèches se sont coupées les oreilles. Ses seize plaques de MINICOMPUTER accueillent les naturels binaires de zéro à quinze. Chaque flèche grise [resp. noire] met un 0 [resp. un 1] à la droite de son numéral binaire de départ. Ainsi, flèches grises et noires dessinent respectivement les restrictions à l'ensemble des seize premiers naturels des fonctions

$$n \mapsto 2n, \quad n \mapsto 2n+1$$

Le lecteur prévenant montrera son chemin à la fonction *successeur* : $+1 : n \mapsto n+1$

Minicomputer chiffre le cadran horaire usuel

A la règle et au compas, le cadran horaire de l'horloge
se gradue à l'aide de MINICOMPUTER



dont les chiffres se lisent en se plaçant au centre du cadran.

Conformément à la tradition horlogère,

le sommet du cadran est marqué "douze" et non "zéro",
ce qui évite de sonner en silence les douze coups de minuit.

Des jeux de rotations de douzièmes de tour

se prêtent à mimer l'*addition des entiers modulo 12*
et leur groupe commutatif additif, traditionnellement noté \mathbf{Z}_{12} , +

Numerisation du cercle des angles

Par construction de bissectrices, le cercle angulaire se gradue en *seizièmes* de tour, exprimés sur une plaque de Minicomputer imaginée au croisement du cercle angulaire et du rayon concerné.

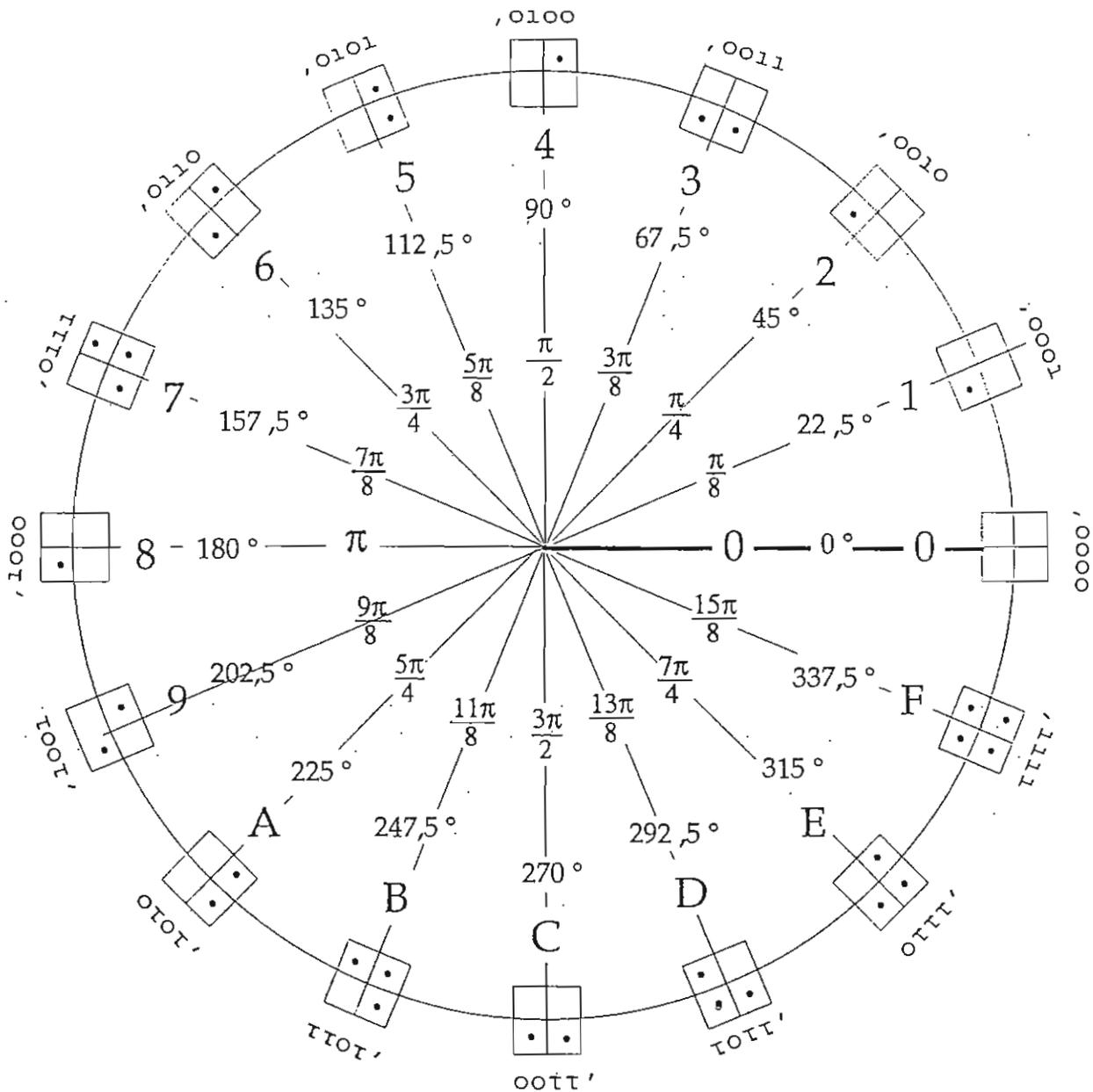
Le dessin ci-dessous exprime encore ces angles en hexadécimal alphanumérique

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F,

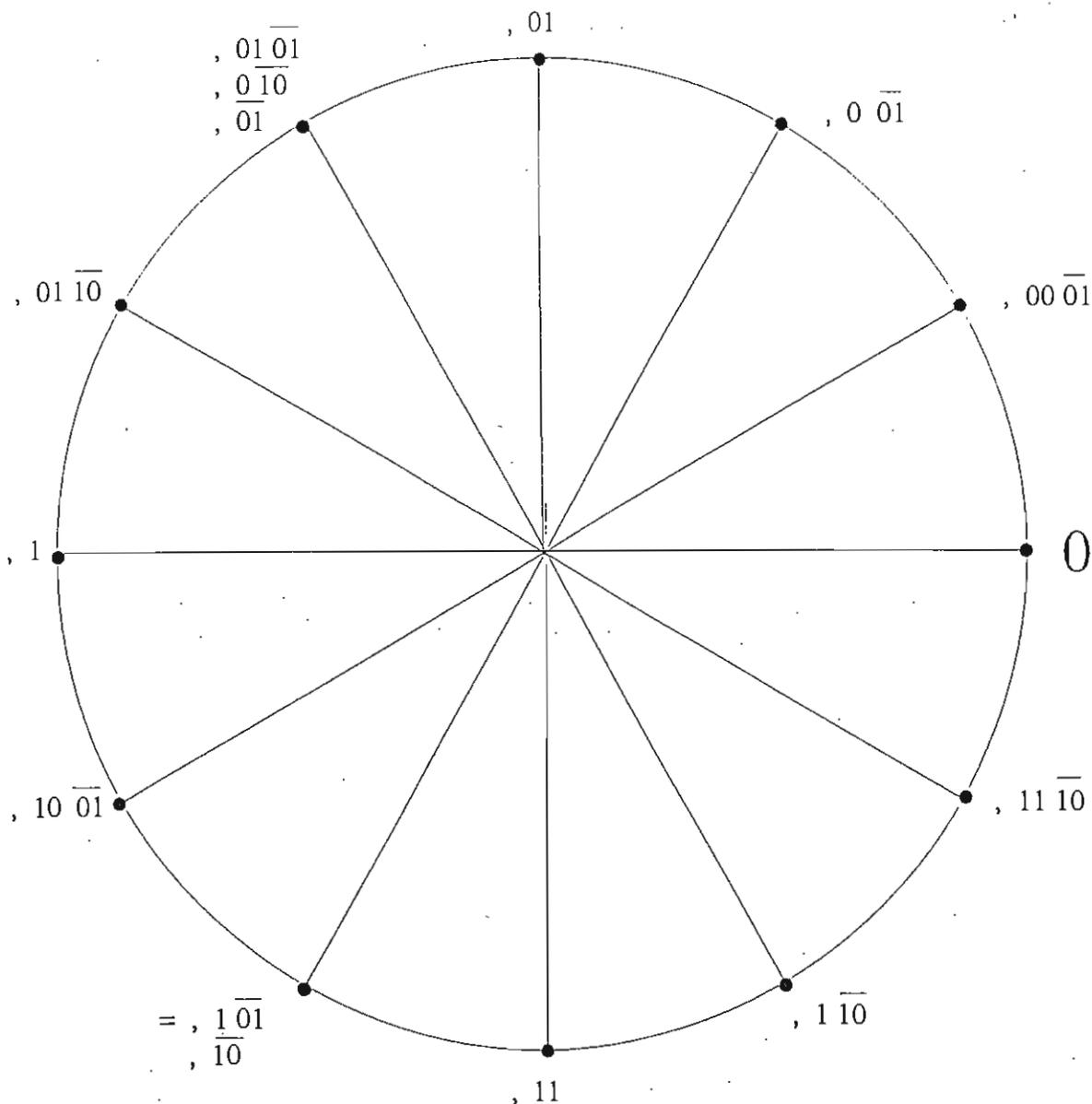
en binaire pur

,0000 ,0001 ,0010 ,0011 ... ,1111

en degrés, et en radians :



Nous venons de voir comment le cercle-unité ou cercle des angles se gradue et se sous-gradue binairement. Les douzièmes de tour exigent déjà le recours à *des binaires décapités illimités*:



Respectant la culture horlogère, le dessin de la page 5 met au sommet le zéro horaire. Conformément à la tradition des rapporteurs, le dessin de la page 6 place l'angle nul à l'extrême droite. Ainsi fait le dessin ci-dessus, pour les douzièmes de tours.

Les mantisses sont toujours positives. Les surlignés signalent ici des *périodes* :

Le douzième de tour = 30° = ,00 01 = ,00 01 01 01 01 etc

Le sixième de tour = 60° = ,00 10 = ,0 01 = ,00 10 10 10 10 etc

120° = ,01 = ,01 01 01 etc et 240° = ,10 = ,10 10 10 etc .

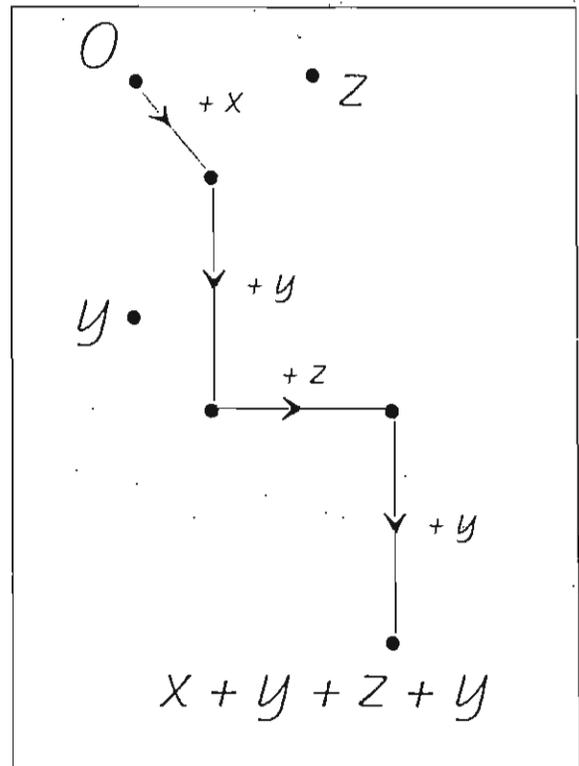
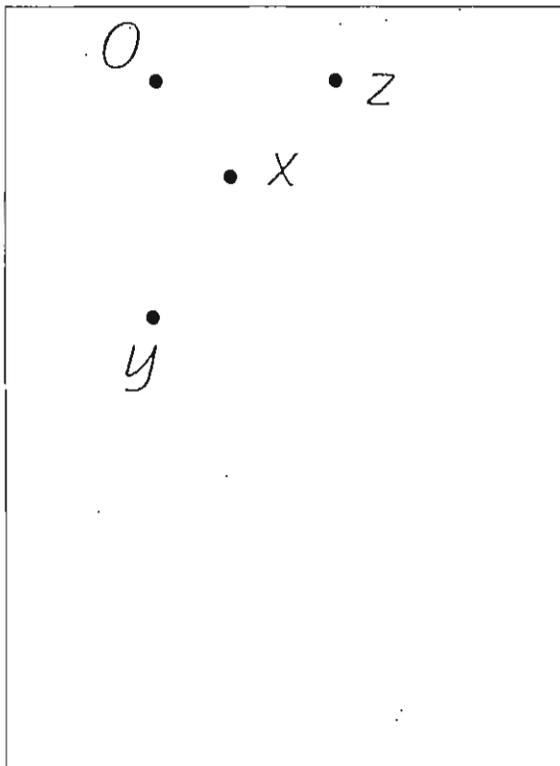
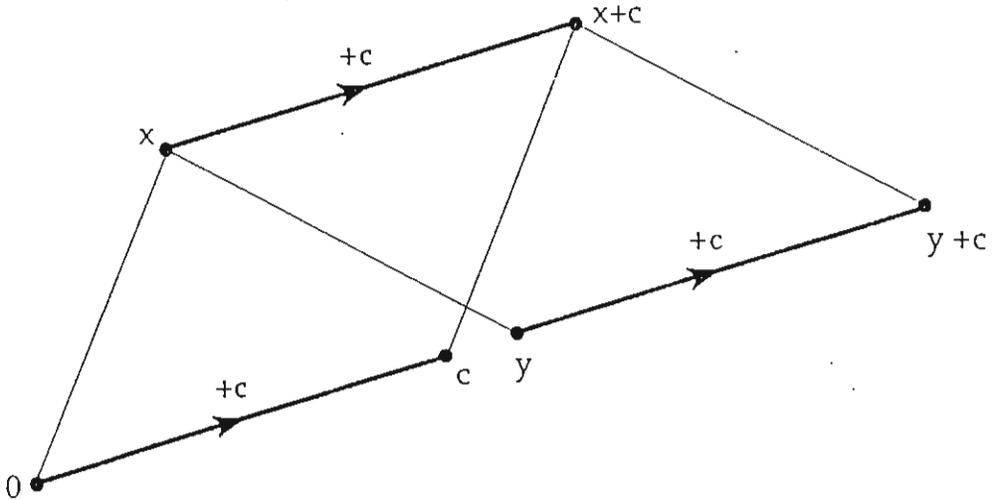
Le binaire est l'ami des bissectrices

Le repérage binaire des angles répond à la construction euclidienne de la bissectrice.
L'addition des angles *enroule* l'addition des nombres réels sur le cercle angulaire.

Le plan de Gauss s'anime additivement par ses translations

Tout nombre complexe $c \in \mathbb{C}$ définit sa *translation* ou *postaddition*

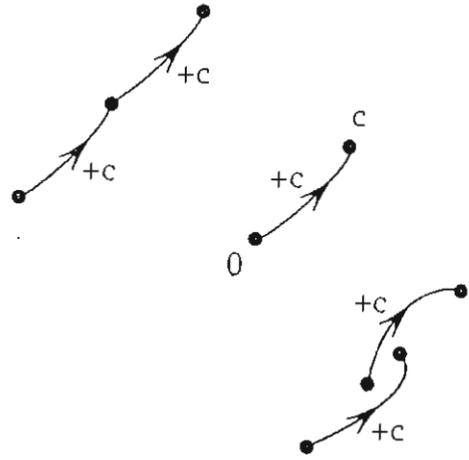
$$+c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : 0 \mapsto 0+c=c, x \mapsto x+c, y \mapsto y+c$$



La fonction $c \mapsto +c$ mime fidèlement la composition des translations. Elle érige ainsi \mathbb{C} en le groupe commutatif additif des nombres complexes $\mathbb{C}, +$ qui prolonge celui des réels $\mathbb{R}, +$.

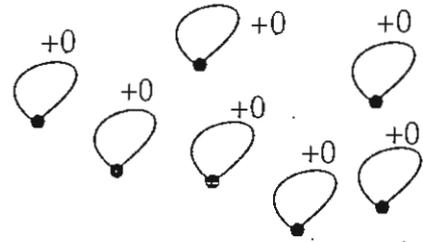
Tout nombre complexe c
définit bijectivement
sa translation ou *postaddition* $+c$
dont voici
quelques flèches.

$\mathbb{C}, +$
modélise fidèlement
l'ensemble des translations de \mathbb{C}



La translation $+0$
définie par le nombre zéro
est la permutation identique
du plan de Gauss

$$+0 = 1c$$



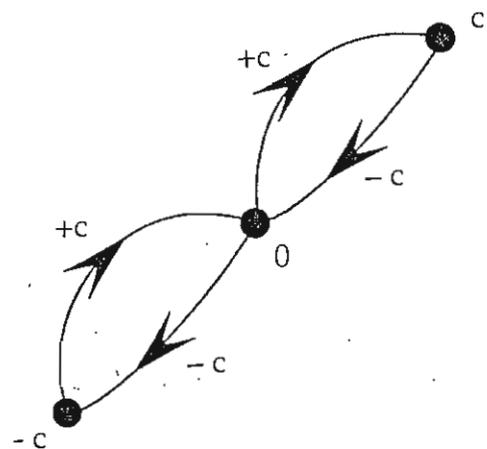
$$+0 = 1c$$

Tout nombre complexe c
définit son symétrique $-c$
par rapport au zéro 0 du plan de Gauss.

Par joyeuse liberté d'expression :

$-c$ nomme aussi
la translation retournée de $+c$

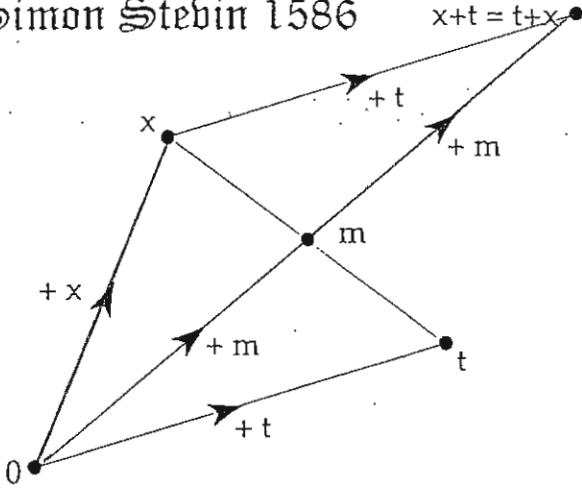
$$c - c = 0 = -c + c$$



\mathbb{C} est devenu le groupe commutatif $\mathbb{C}, +$ des nombres complexes
et \mathbb{R} son sous-groupe commutatif ordonné $\mathbb{R}, +, \leq$ des nombres réels.

Transposition, aux translations du plan de Gauss, des démarches du flamand Simon Stevin et de l'italien Galilée, confrontés au problème de la résultante de deux forces appliquées en un même point, ancêtre des problèmes de composition.

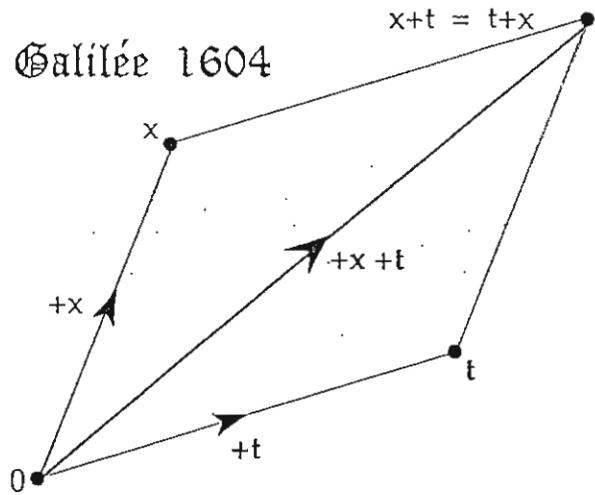
Simon Stevin 1586



Moyenne = demi-somme
 Somme = double moyenne
 Admirateur d'Euclide,
 Simon Stevin
 voit la *moyenne*
 de deux côtés d'un triangle
 en la *médiane*
 issue de leur sommet commun
 ... et la *résultante* ou *somme*
 en le double de cette médiane.

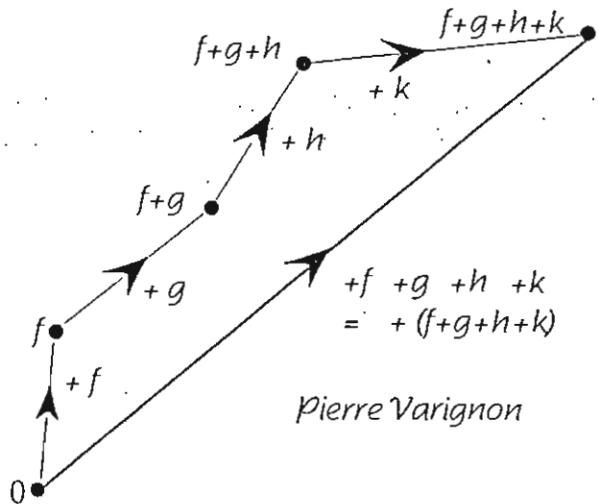
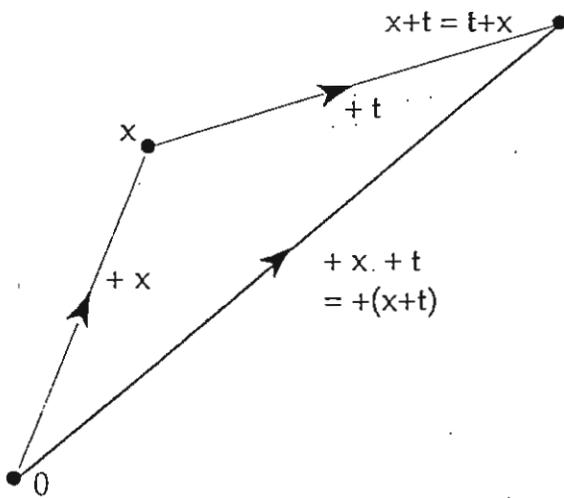
Galilée admire Archimède,
 déteste Aristote et
 s'énerve
 au ronron
 des triangles d'Euclide.

Galilée 1604



Il va droit au but par son
parallélogramme des forces

Le triangle des forces de Simon Stevin se mue et généralise en *polygone de translations*.



Pierre Varignon

Points fixes

Tout nombre complexe c définit sa translation, ou *postaddition* $+c$ qui est une permutation du plan de Gauss \mathbb{C} , ensemble des nombres complexes. Dire que la fonction f fixe le point p de son domaine signifie que son graphe place une boucle en p ce que nous formulerons ici $pf = p$. La translation $+c$ fixe tous les points de \mathbb{C} ou n'en fixe aucun, selon que c est nul ou non.

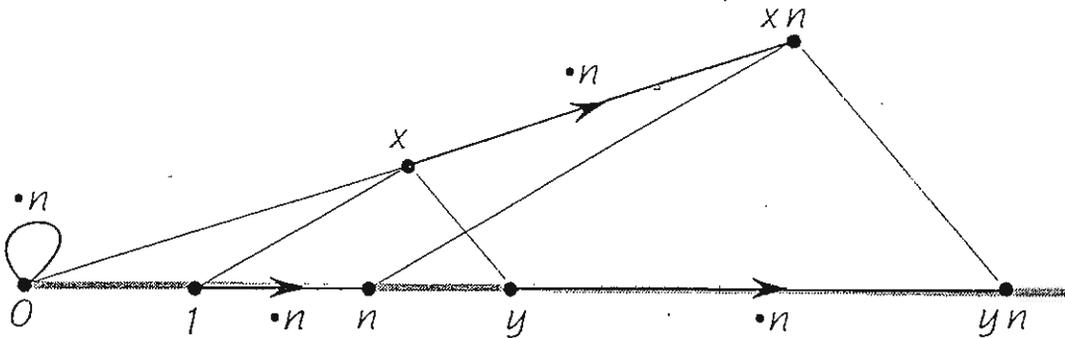
Similitudes

Quand l'enseignant dessine des figures au tableau, l'élève les reproduit à l'échelle, aussi semblables que possible, sur sa feuille de notes. Si d'aventure à la maison, le petit frère s'en empare et en fait une boulette pour jouer à la balle, le mal n'est pas grand: la feuille chiffonnée porte toujours son message. Ces "similitudes" imprévues, non standard, très variées, sont loin d'être toujours planes. Beaucoup moins audacieuses, les similitudes du royaume \mathbb{C} des nombres complexes sont les composées des rotations et des échelles zérocentrées. Sauf mention expresse du contraire, *similitudes*, *rotations*, *échelles* seront toujours supposées zérocentrées, et sont donc des transformations du plan de Gauss \mathbb{C} , qui fixent zéro : $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : 0 \mapsto 0$.

La rotation [zérocentrée] d'angle α étant notée $\cdot\alpha$, suit $\cdot\alpha \cdot\beta = \cdot(\alpha \hat{+} \beta)$, où le signe $\hat{+}$ souligne l'addition angulaire lue sur le cercle rapporteur.

La réminiscence $b^x \cdot b^y = b^{x+y}$ laisse pointer la vocation exponentielle des rotations.

L'échelle de norme n notée $\cdot n$, se définit:



La transformation nulle $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : c \mapsto 0$ est l'échelle de norme nulle. Les échelles de norme non nulle sont des permutations de \mathbb{C} . La norme d'une composée d'échelles est le produit de leurs normes.

La page suivante définit

similitude [zérocentrée] d'angle α et de norme n :

$$\cdot\alpha \cdot n = \cdot n \cdot \alpha$$

composée commutative de la rotation d'angle α et de l'échelle de norme n

ou

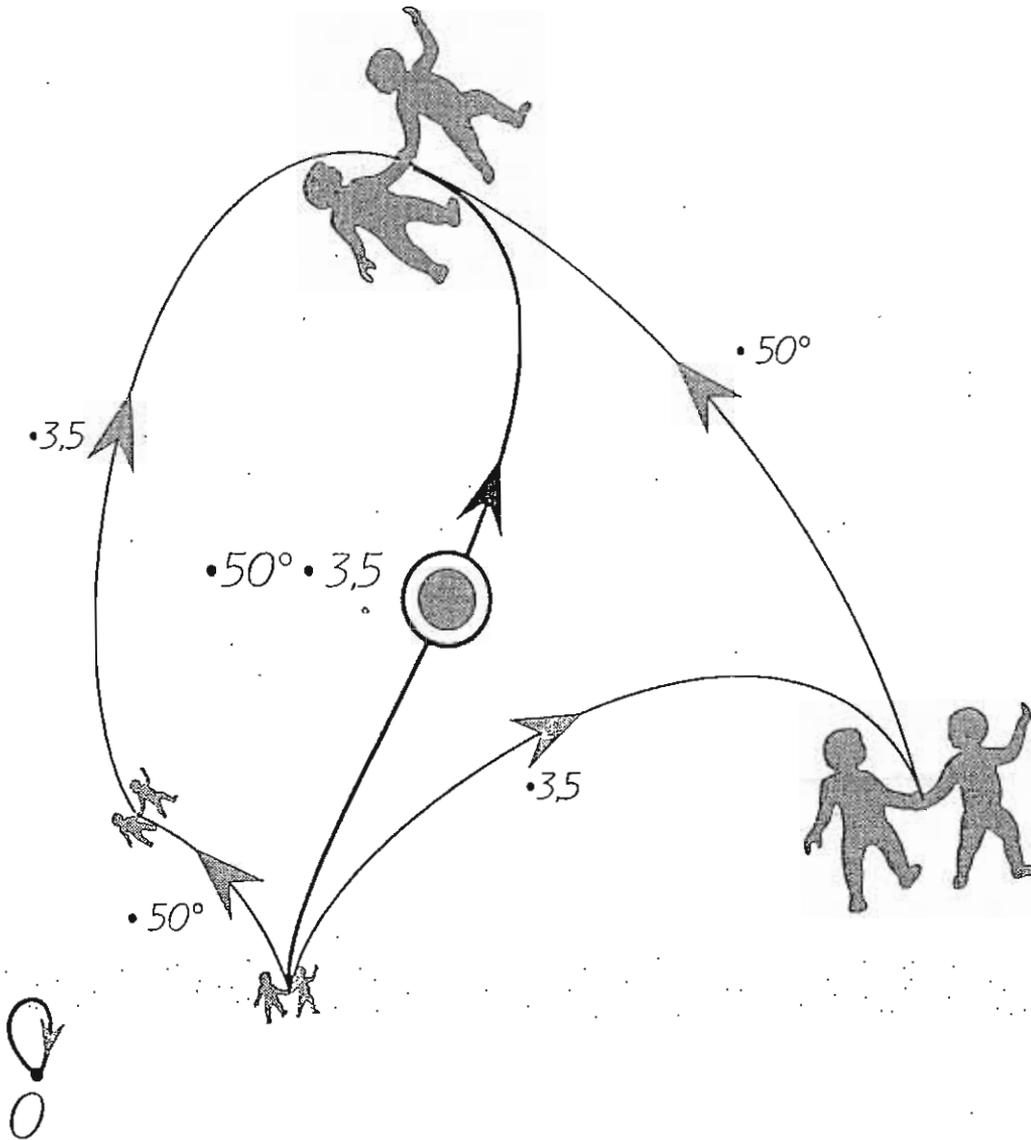
postmultiplication $\cdot c$ par le nombre complexe c d'angle α et de norme n

En ce texte, rotations, échelles et similitudes sont toujours supposées zérocentrées

Similitude $\cdot c$, d'angle 50° d'échelle 3,5

=

Échelle 3,5 tournant de 50°



Les rotations sont les similitudes de norme 1.

Les échelles sont les similitudes d'angle nul.

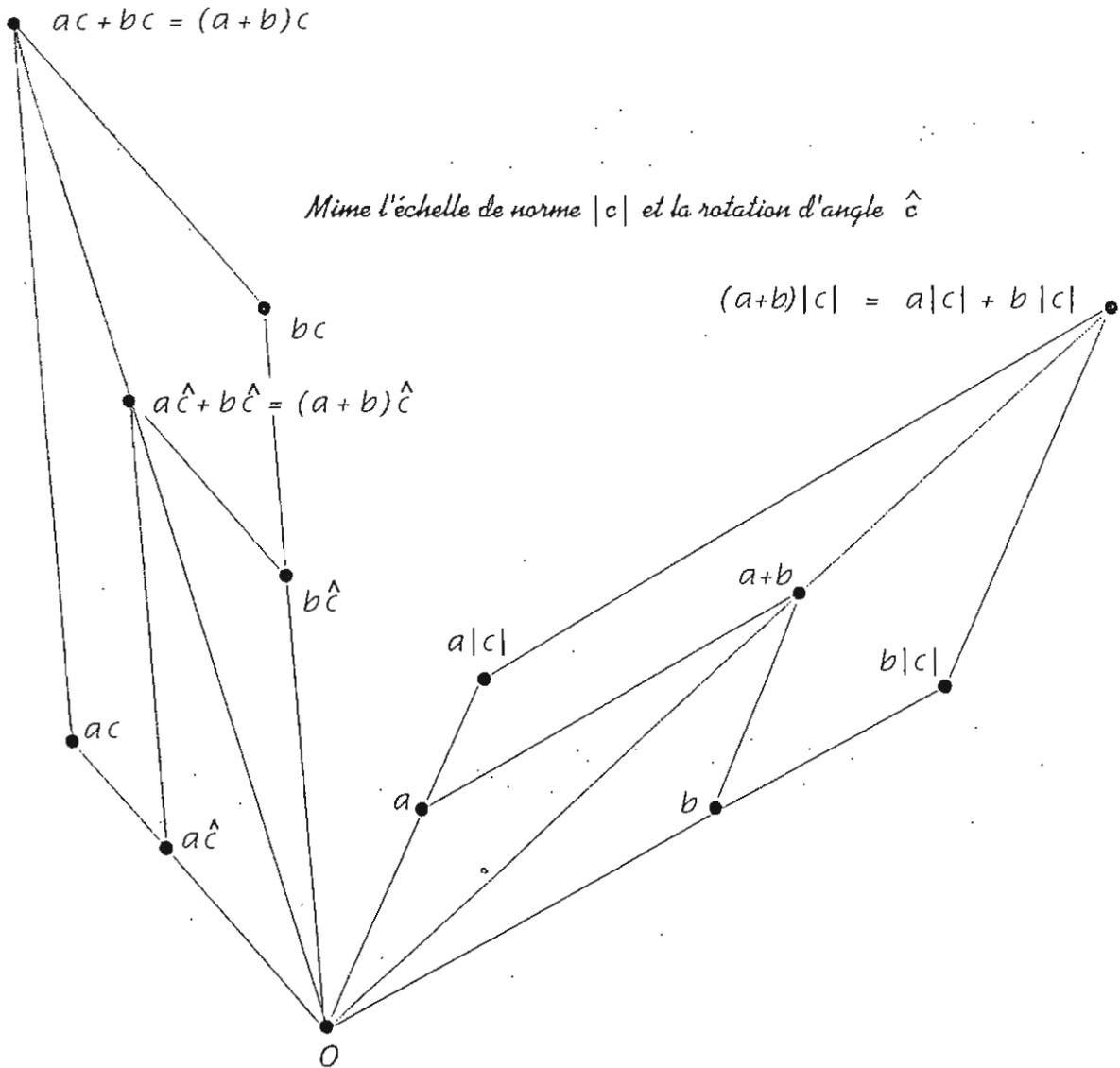
La permutation identique de \mathbb{C} est la similitude de norme 1 et d'angle nul.

La symétrie centrale $\cdot -1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : c \mapsto -c$ est le demi-tour.

$\cdot i$ est le quart de tour à gauche d'où $i^2 = -1$.

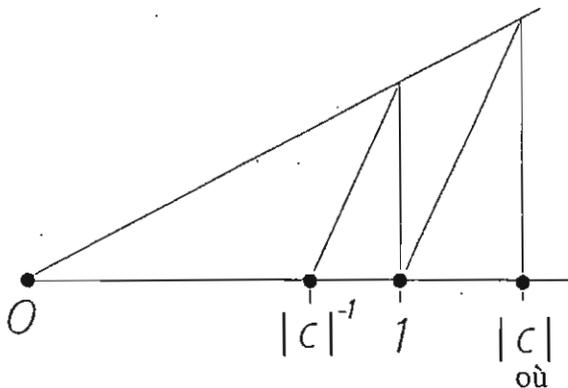
La multiplication des nombres complexes distribue leur addition :

Par Galilée, car échelles et rotations respectent ses parallélogrammes de composition.



Ainsi $\mathbb{C}, +, \cdot$ se prouve anneau commutatif, extension du champ réel $\mathbb{R}, +, \cdot$

Pour établir que $\mathbb{C}, +, \cdot$ est le champ complexe, reste à exhiber l'inverse du nombre complexe $c \neq 0$. L'hypothèse $c \neq 0$ entraîne $|c| \neq 0$ d'où la construction de $|c|^{-1}$



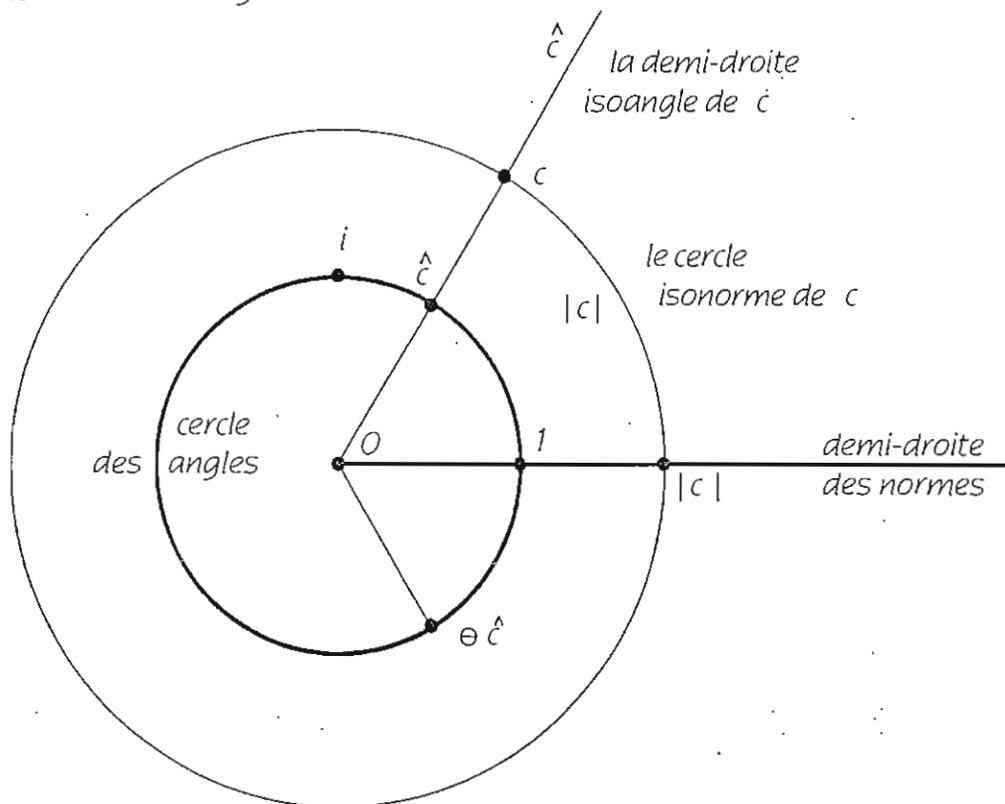
et finalement

$$c^{-1} = \hat{c} \cdot |c|^{-1}$$

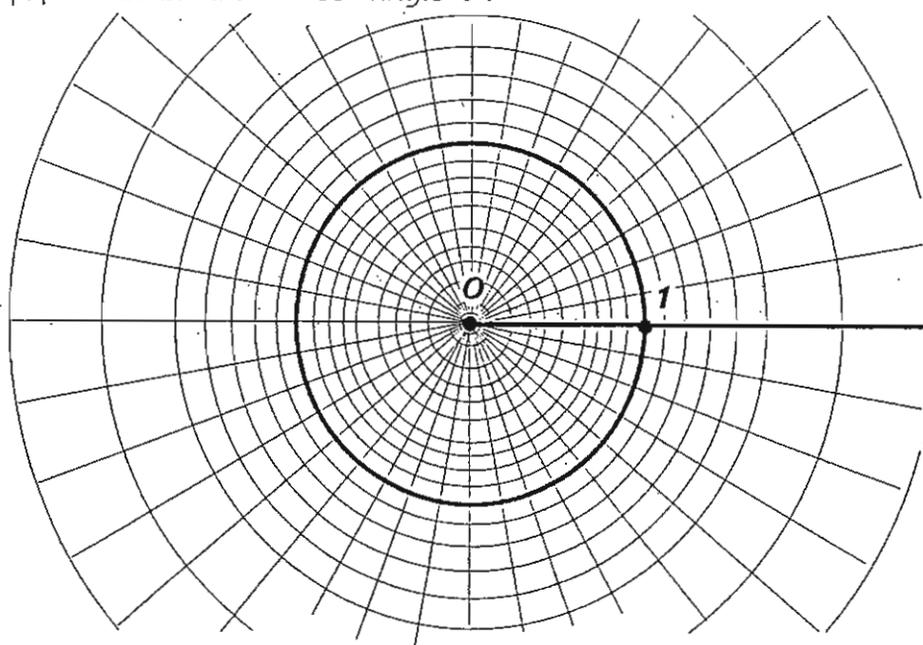
où le signe \hat{c} attire l'attention en notant le "moins" angulaire, lu sur le cadran du rapporteur d'accueil.

Radar

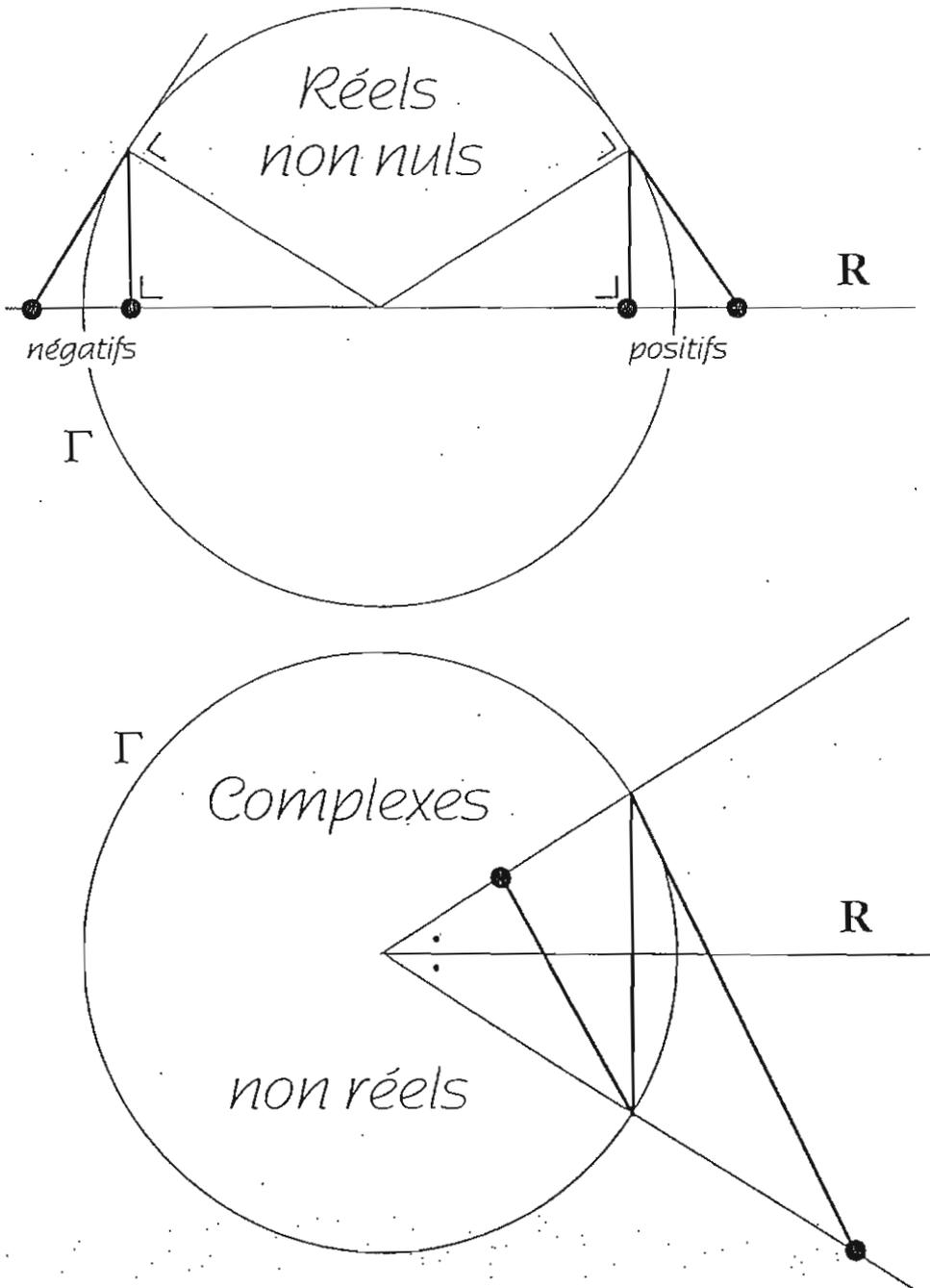
Les nombres réels sont les points de la droite numérique réelle de Cantor. Les nombres complexes sont les points du plan numérique complexe de Gauss. Tout nombre complexe non nul $c \neq 0$ se trouve à l'intersection de son cercle isonorme $|c|$ et de sa demi-droite isoangle \hat{c}



° Ainsi se trouve installé un radar qui repère tout point c du plan de Gauss par sa norme $|c|$ ou distance à 0 et son angle \hat{c} .

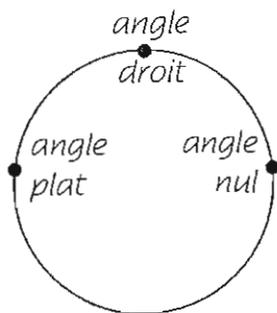


Angles et normes se lisent sur le cercle des angles (où cercle de norme 1) et la demi-droite des normes (ou demi-droite d'angle nul).



Le détail des preuves est offert au plaisir du lecteur.

Conjugaison



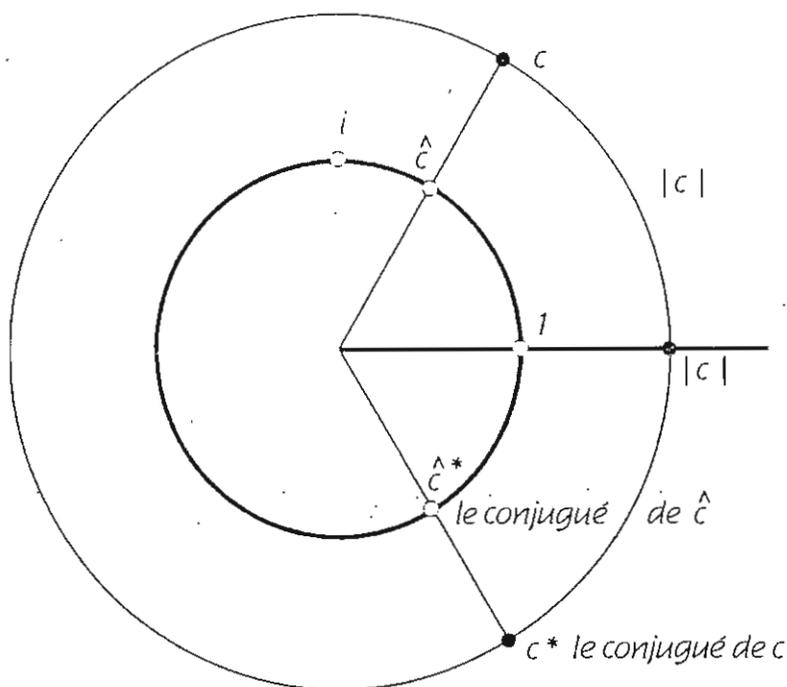
Cercle des angles

La demi-droite numérique \mathbb{R}^+ des nombres réels positifs ou nombres complexes d'angle nul, se prolonge en la *droite de Cantor* $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$ de tous les nombres réels, ou nombres complexes d'angle nul ou *plat*.

La *conjugaison* est la symétrie orthogonale

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : c \mapsto c^*$$

d'axe \mathbb{R} du plan de Gauss \mathbb{C}

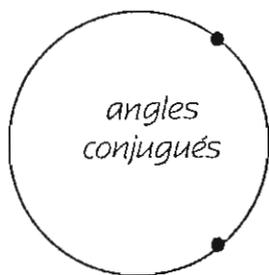


La conjugaison fixe la norme et conjugue l'angle.

Les nombres réels sont les points fixes de la conjugaison.

Le champ complexe se mire par conjugaison :

$$(c+d)^* = c^* + d^* \quad (cd)^* = c^* \cdot d^* \quad \blacksquare$$



Cercle des angles

Deux nombres complexes sont conjugués si et seulement

s'ils sont de même norme : $|d| = |c|$

et d'angles conjugués : $\hat{c} \oplus \hat{d} = \hat{0}$

Leur produit égale donc le carré de leur commune norme

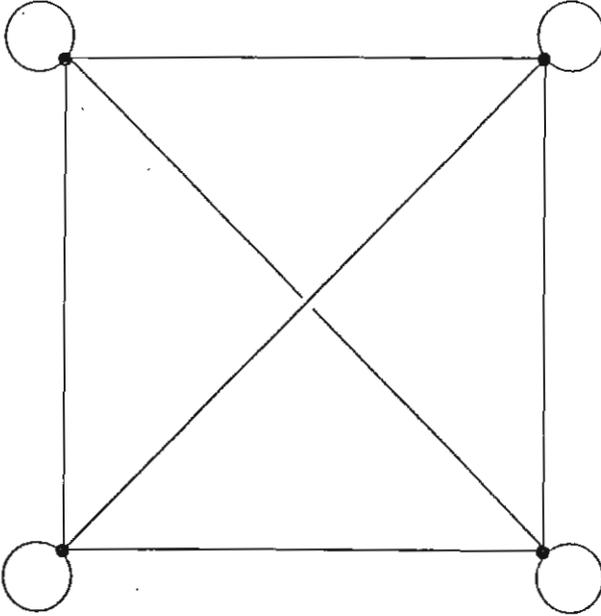
$$c \cdot c^* = |c|^2$$

■

Le Viergruppe de Klein, hymne national au pays des nombres complexes.

BEAUMARCHAIS commente la nouvelle version du *Barbier de Séville* — quatre actes au lieu de cinq— par ces mots inoubliables : *Nous nous sommes mis en quatre pour vous plaire.*

Pour nous plaire aussi —n'en doutons pas— les nombres complexes non nuls entonnent volontiers le *Viergruppe de Klein* :



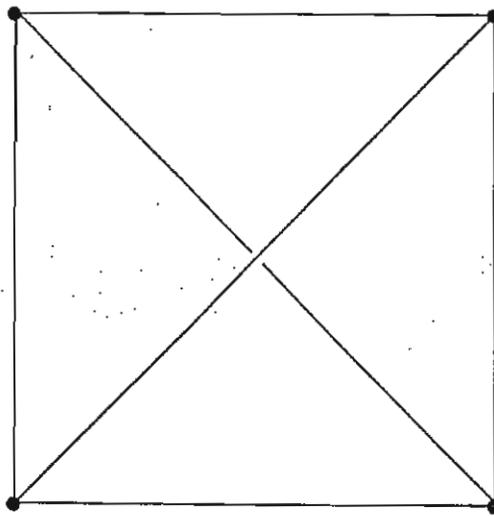
Chacun des sommets de ce diagramme figure le plan de Gauss \mathbb{C} et chacune de ses boucles sa transformation identique $1_{\mathbb{C}}$.

Horizontalement : *Symétrie angulaire* encore nommée *conjugaison*
 Verticalement : *Inversion radiale*
 Obliquement : *Inversion multiplicative des nombres complexes non nuls.*

Ce qui s'explique

$$C = r \cdot \alpha$$

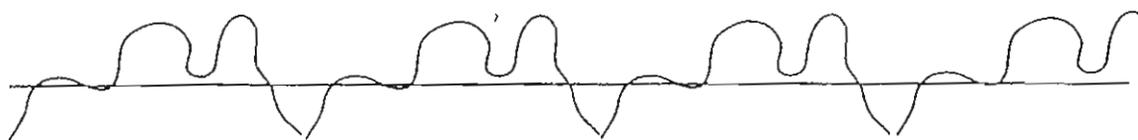
$$r \cdot \bar{\alpha} = C^*$$



$$r^{-1} \cdot \alpha$$

$$C^{-1} = r^{-1} \cdot \bar{\alpha}$$

Le sans nom $r^{-1} \cdot \alpha$ est l'inverse du conjugué et le conjugué de l'inverse de C .

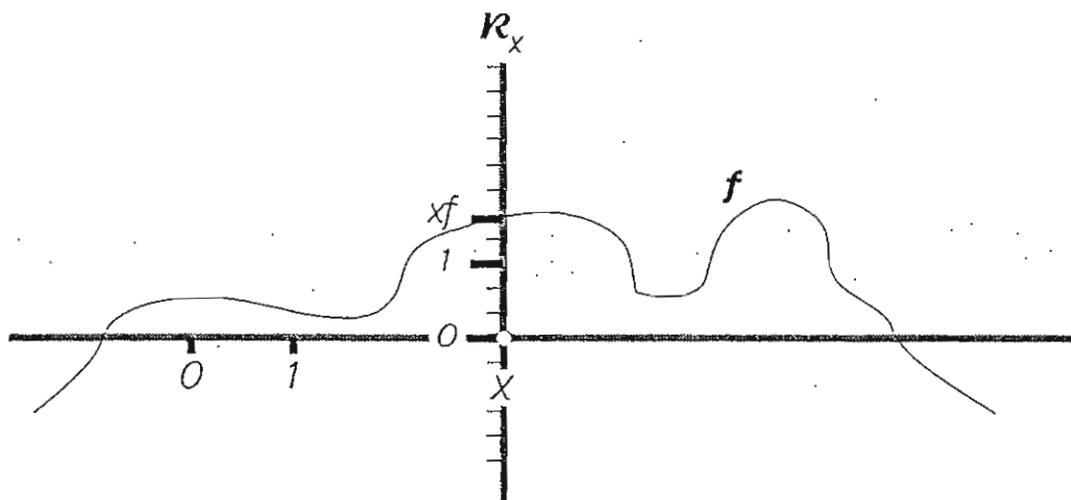


Confessant qu'une fonction périodique est une fonction définie sur un cercle, Heinz Hopf enroule de manière adéquate la frise ci-dessus sur un cercle: disons, pour fixer les idées, sur le cercle des angles. Et définissons classiquement

$$\left| \begin{array}{c} \text{Fonction circulaire [réelle]} \\ = \\ \text{Fonction [à valeurs réelles] définie sur le cercle des angles.} \end{array} \right|$$

Dans le graphique du fronton de cette section, les valeurs de la variable indépendante et de la variable dépendante, en un point du graphe, s'obtiennent traditionnellement par projections orthogonales sur les deux axes orthogonaux fixes et parfaitement symétriques, du repère cartésien. Concédant que la version originale de Descartes n'est pas aussi parfaitement symétrique, les historiens de la mathématique semblent y déceler un grain de folie peu cartésien.

La version cartésienne originale fixe l'axe de la variable indépendante, [horizontal en le dessin ci-dessous] et présente celui de la variable dépendante comme un repère mobile, perpendiculaire au précédent, autorisé à se translater parallèlement à l'axe fixe. L'abscisse x détermine la position "instantanée" \mathcal{R}_x , du repère mobile.

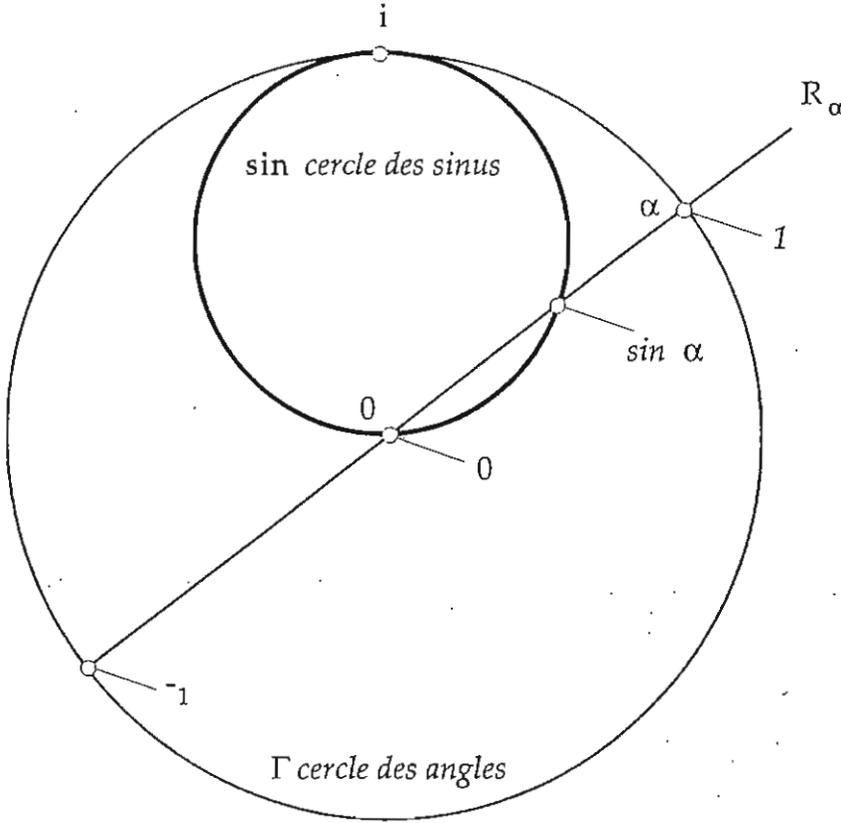


La non symétrie de la représentation cartésienne originale facilite le passage à la représentation des fonctions circulaires, situation non symétrique *in se*, puisqu'il y s'agit des fonctions dont le domaine est le cercle des angles Γ et le but la droite numérique réelle \mathbb{R} . Nous poursuivrons notre étude en la focalisant sur la fonction circulaire *SINUS*.

Sinus, héritier du concept de demi-corde d'arc double

Reine des fonctions circulaires réelles, ou fonctions $\Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ à valeurs réelles, définies en tout angle α , la fonction **sinus** se définit selon le *Robert historique de la Langue française*: *demi-corde de l'arc double*. Bravo Robert !

Dans le même esprit, notre structure d'accueil du plan de Gauss autorise cette définition-choc de la fonction *sinus* via son graphe: ... le cercle *sin* !



Le cercle des sinus est l'image du cercle des angles par l'échelle de centre i et de rapport $1/2$... qui fait écho aux accords "*demi-corde d'angle double*"

En la page précédente, les valeurs de la fonction f se lisent sur un repère mobile R_x . Ici, les valeurs du *sinus* se lisent sur le repère mobile constitué par la droite numérique graduée R_α qui passe par le zéro du plan de Gauss, et dont l'indice α parcourt le cercle des angles.

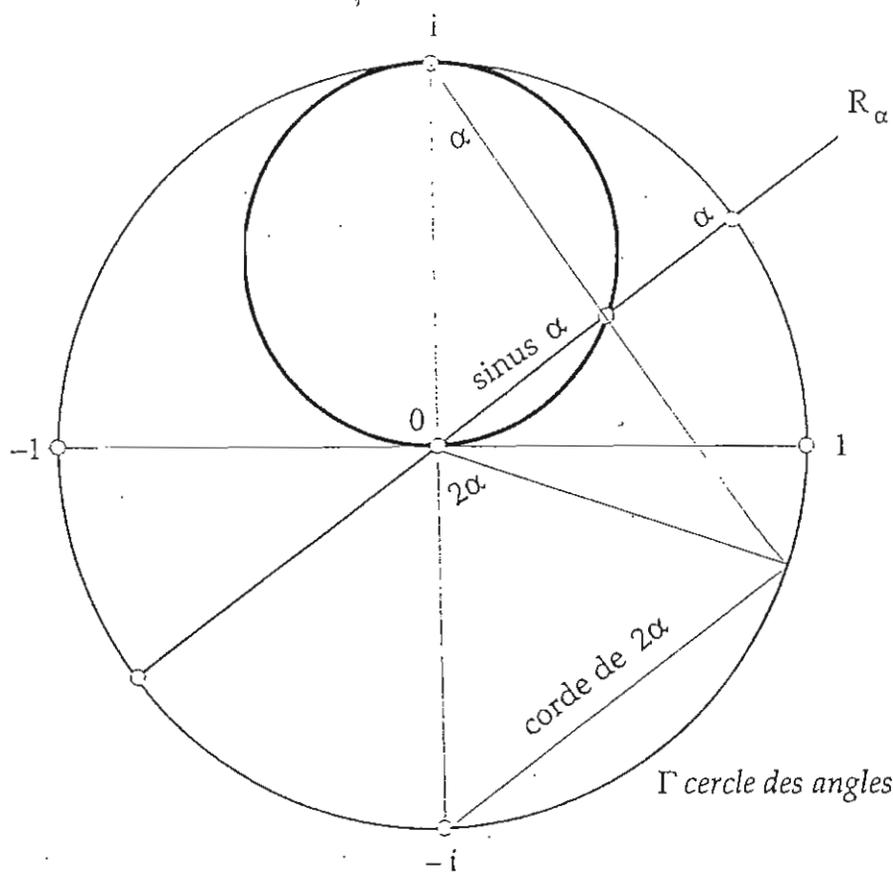
Le zéro de R_α marque le zéro 0 du plan de Gauss, commun au repère mobile R_α et au cercle des sinus. L'unité 1 de R_α marque α .

Par définition même, $\sin \alpha$ marque le second point de l'intersection du repère mobile et du cercle des sinus. La définition proposée de la fonction *sinus* est ainsi terminée.

$$| \sin | \leq 1$$

Le sinus proposé vérifie l'exigence archaïque de demi-corde du double de l'angle.

Le sinus proposé vérifie l'exigence archaïque de demi-corde du double de l'angle :



Le tour du sinus

D'un index suivre α faisant le tour du cercle des angles,
et de l'autre index suivre la pérégrination de son sinus.

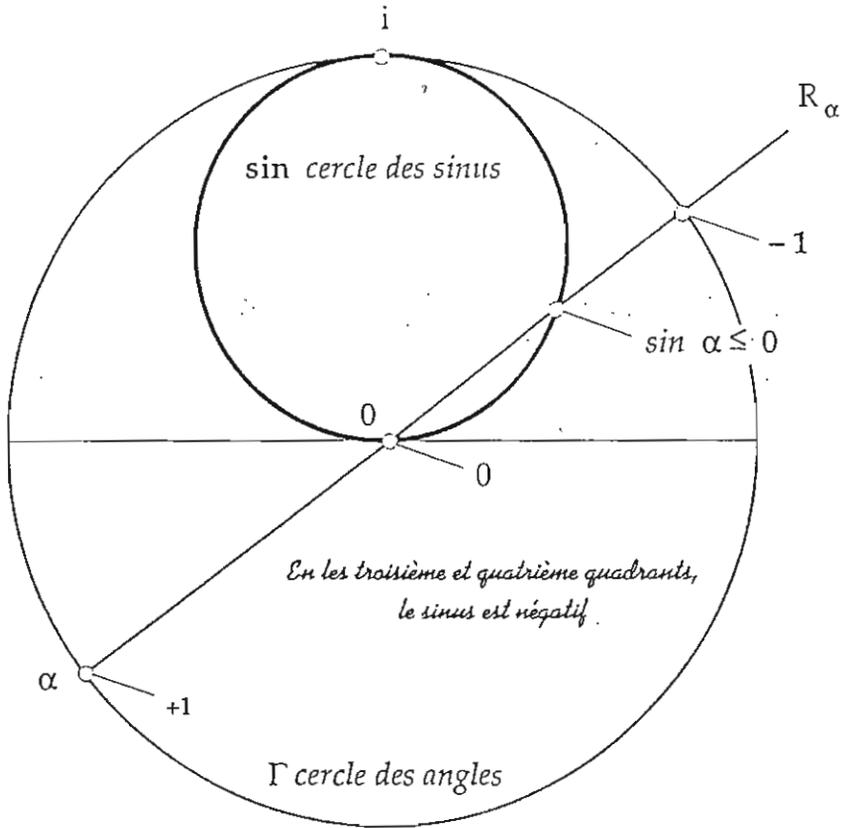
Premier quadrant

α	0°	\nearrow	30°	\nearrow	45°	\nearrow	60°	\nearrow	90°
$\sin \alpha$	0	\nearrow	$\frac{1}{2}$	\nearrow	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	\nearrow	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	\nearrow	1

Second quadrant

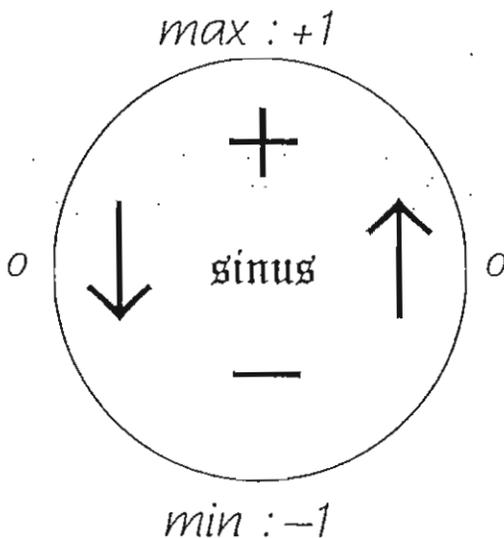
α	90°	\nearrow	120°	\nearrow	135°	\nearrow	150°	\nearrow	180°
$\sin \alpha$	1	\searrow	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	\searrow	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	\searrow	$\frac{1}{2}$	\searrow	0

En les troisième et quatrième quadrants, l'angle α et sa marque 1 se trouvent dans l'hémicycle sud, entraînant la négativité de $\sin \alpha$:



α	180°	\nearrow	210°	\nearrow	225°	\nearrow	240°	\nearrow	270°
$\sin \alpha$	0	\searrow	$-\frac{1}{2}$	\searrow	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	\searrow	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	\searrow	-1
α	270°	\nearrow	300°	\nearrow	315°	\nearrow	330°	\nearrow	360°
$\sin \alpha$	-1	\searrow	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	\searrow	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	\searrow	$-\frac{1}{2}$	\searrow	0

Signe et variation de la fonction sinus



La fonction sinus est positive dans les deux premiers quadrants et négative dans les autres.

En 90° : maximum égal à 1.

En 270° : minimum égal à -1.

Elle s'annule en l'angle nul et en l'angle plat [égal à 180°]

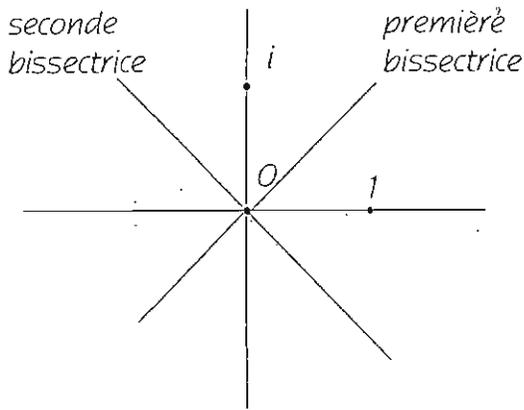
De -90° à 90° , elle croît de -1 à +1

De 90° à 270° , elle décroît de 1 à -1

Pour tout angle α :

$$\sin -\alpha = -\sin \alpha, \quad \sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha,$$

$$\sin (180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha.$$



À partir de la fonction circulaire *circ*
la fonction circulaire *cocirc* se définit :

Pour tout angle α :

$$\text{cocirc } \alpha = \text{circ}(90^\circ - \alpha)$$

Chant du coq des fonctions circulaires

$$\text{COCOCIRC} = \text{CIRC}$$

Si G est graphe polaire de *circ*

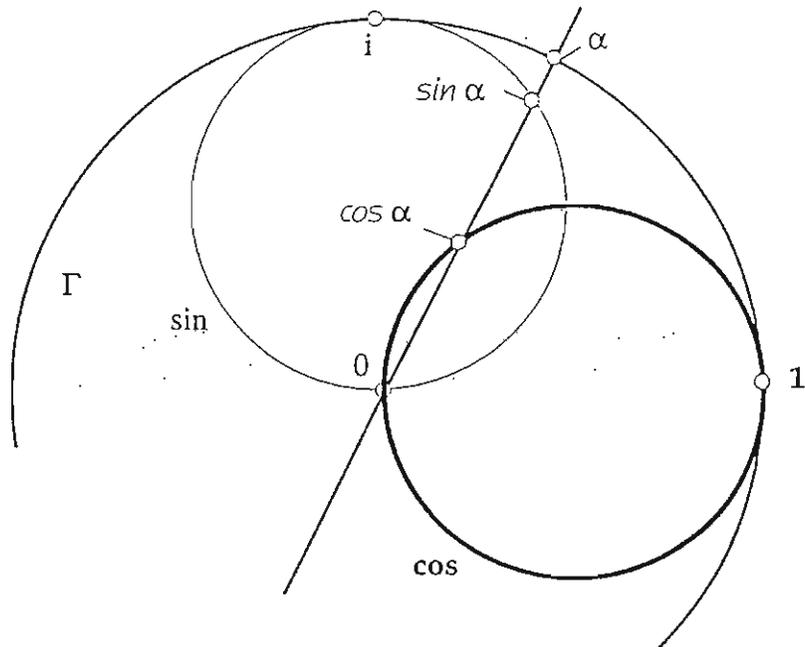
Alors son symétrique par rapport à la première bissectrice du plan de Gauss
est graphe polaire de *cocirc*.

Ainsi le
cercle
cos

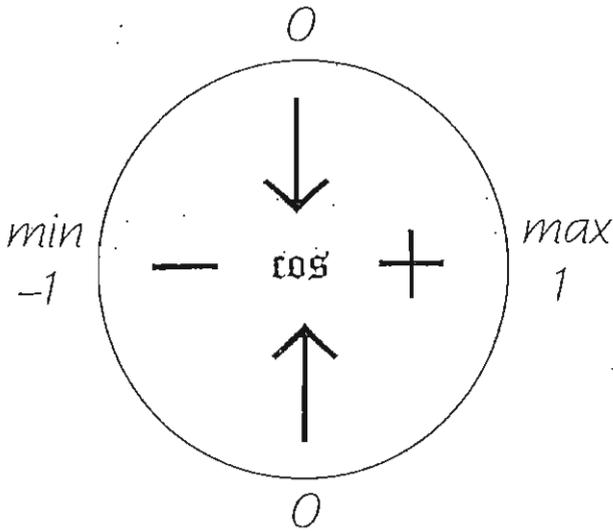
en grasse
ci-contre

définit-il

la fonction
circulaire
cosinus



Signe et variation de la fonction cosinus



La fonction cosinus est positive dans les quadrants de droite et négative dans les autres.

En 0° : maximum égal à 1

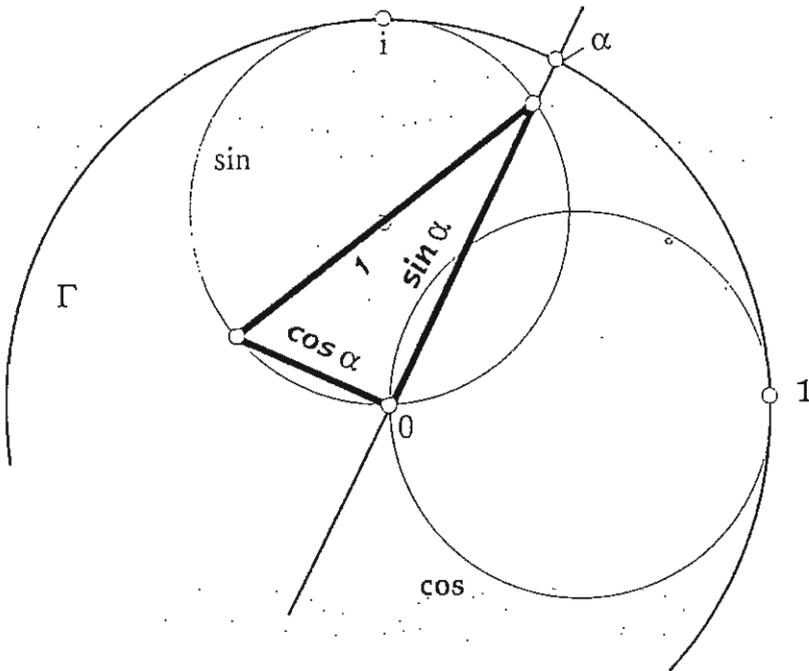
En 180° : minimum égal à -1

Elle s'annule en 1^{er} dr et en 3^{es} dr.

De 0° à 180° , elle décroît de 1 à -1

De 180° à 360° , elle croît de -1 à $+1$

En le dernier dessin de la page précédente, de centre 0, rote d'un angle droit le cercle des cosinus et sa corde $\cos \alpha$:



S' en déduit :

Pour tout angle α

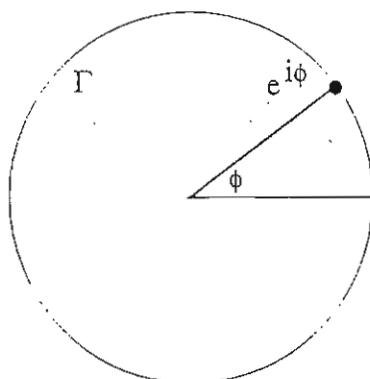
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Comme la multiplication complexe additionne les angles et multiplie les rayons

*l'exponentielle
imaginaire d'angle ϕ*

$$e^{i\phi}$$

se définit
sans innocence



se calcule

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$$

$$|e^{i\phi}| = 1$$

et justifie d'emblée sa notation par la formule

$$e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha + \beta)}$$

et ses conséquences immédiates :

Pour tous angles α, β :

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot (\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

où + note l'addition angulaire en $\alpha + \beta$ et l'addition complexe partout ailleurs!

° Un calcul direct en champ complexe récrit le premier membre

$$(\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta) + i (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)$$

D'où les formules d'addition

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

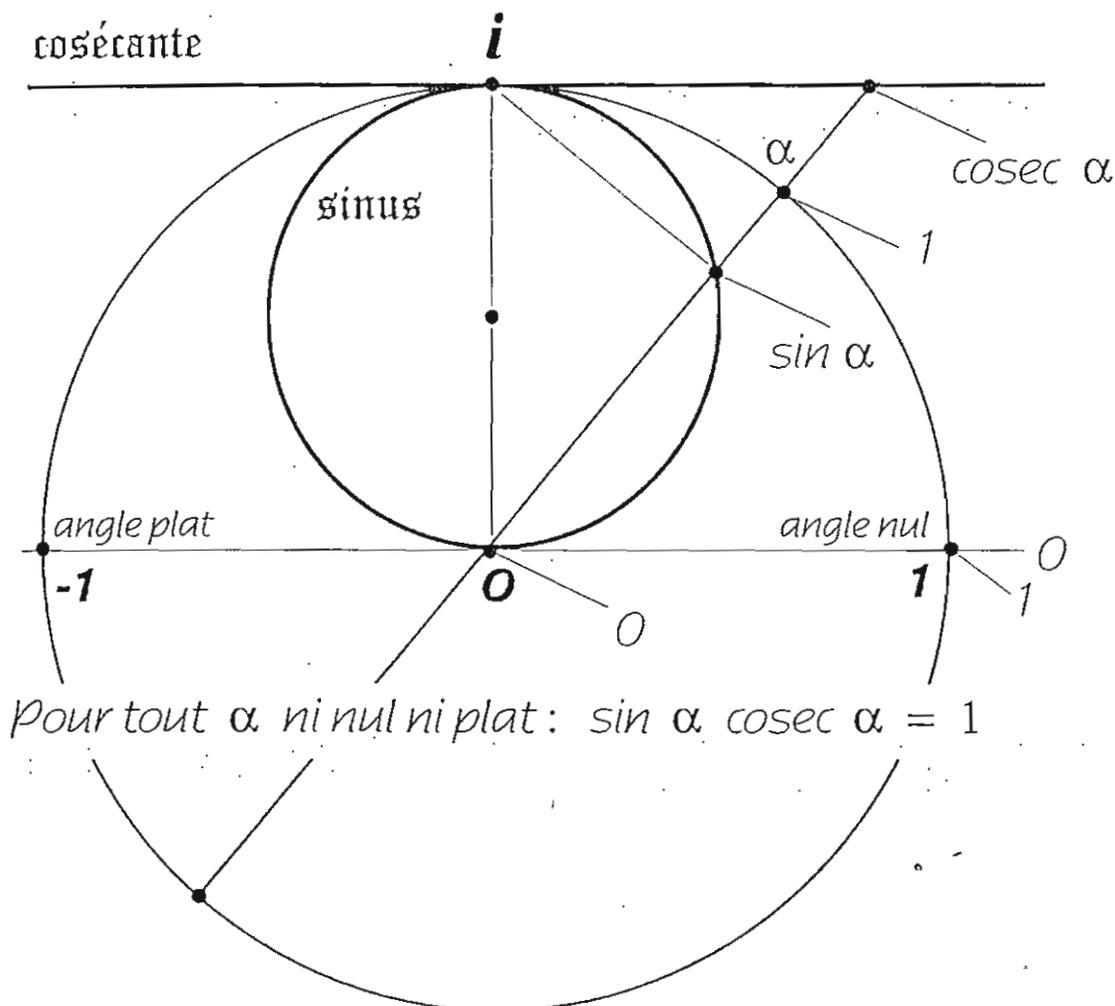
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

La fonction *cosécante* se définit par son graphe: la *tangente en i* au cercle des angles:



Ainsi, la fonction cosécante ne se trouve encore définie ni en l'angle nul ni en l'angle plat.

On disait volontiers que, *tournant dans le sens direct, opposé à celui des aiguilles de la montre, cosec passe brusquement de $-\infty$ à $+\infty$ en l'angle nul et de $+\infty$ à $-\infty$ en l'angle plat, ce qui se formulait parfois*

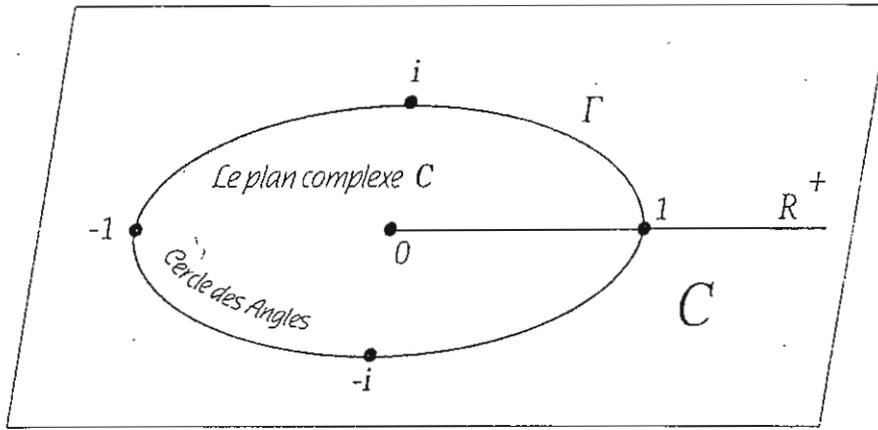
$$\operatorname{cosec} 0 = \mp \infty, \operatorname{cosec} 2\pi = \pm \infty.$$

Au lieu de ces petits arrangements locaux,

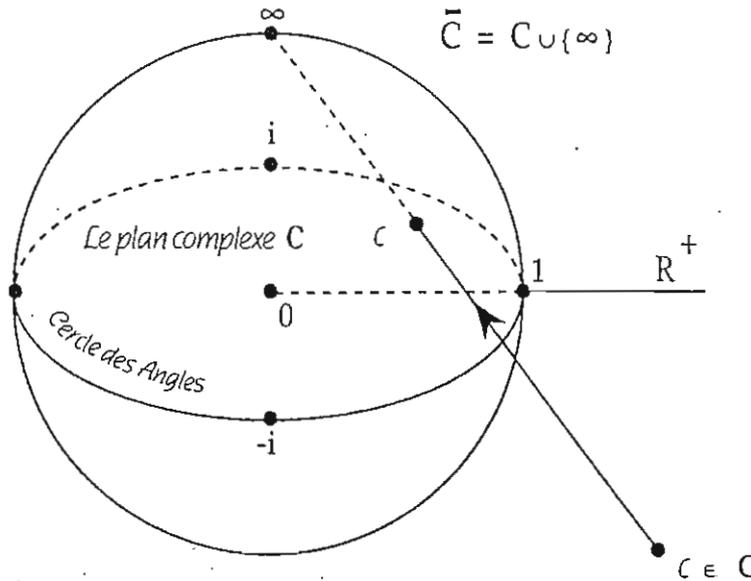
Riemann permettra de faire mieux en une large vision.

Du plan à la sphère: [Georg Friedrich] Bernhard Riemann 1826-1866

Revoici le plan de Gauss C , présenté en perspective cavalière: avec le cercle des angles Γ et la demi-droite R^+ des rayons ou nombres réels positifs.



Symbole médiéval *compact* du bonheur
s'installe la sphère \bar{C} d'équateur Γ et de Pôle Nord ∞



dans l'intention d'offrir au plan de Gauss C une représentation sphérique fidèle

$\bar{C} = C \cup \{\infty\}$ achevée par le *nombre infini complexe* ∞ :

ce qu'anime, scelle et célèbre la rétrojection injective de centre ∞

$$C \rightarrow \bar{C} : c\text{-en-Gauss} \mapsto c\text{-en-Riemann}$$

du plan de Gauss

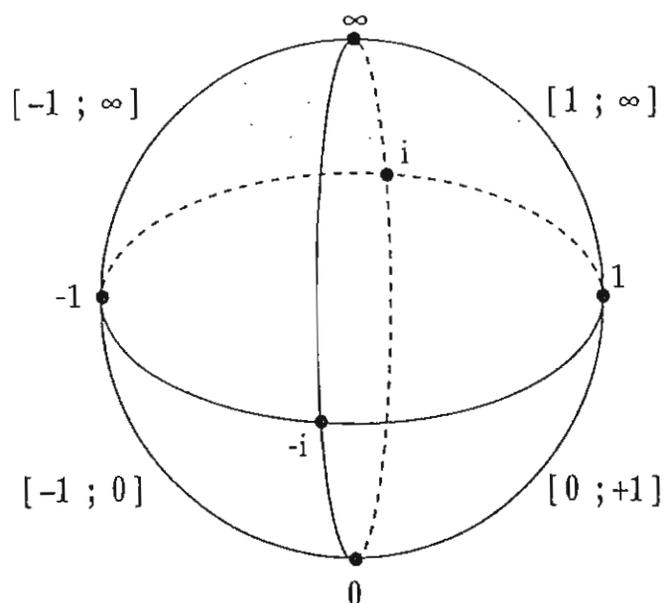
dans la sphère de Riemann.

*Leurs différences augmentent mutuellement*¹

la sphère de départ \bar{C} et le plan de Gauss C .

¹ Selon Saint Exupéry

Sphère faisant, toutes les droites du plan de Gauss \mathbb{C} se prolongent en cercles par adjonction du nombre complexe infini ∞ . Trois cercles de la sphère de Riemann émergent .



L'équateur Γ des angles
ou nombres complexes unimodulaires.
[= de *module* ou *rayon* 1 en plan de Gauss]
En majesté,
le cercle numérique réel $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$
De quasi profil,
le cercle numérique imaginaire
 $i \mathbb{R} \cup \{\infty\}$
Mutuellement orthogonaux,
ces trois grands cercles,
délimitent huit triangles trirectangles
qui pavent la sphère de Riemann.

Cantor nous donna la droite numérique réelle \mathbb{R}

prolongée par Gauss en le plan numérique complexe \mathbb{C}

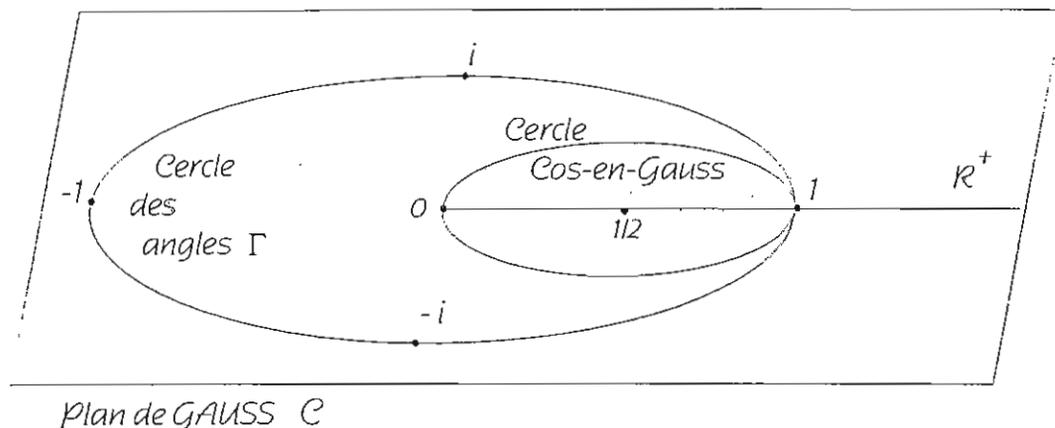
prolongé par Riemann en la sphère numérique complexe $\bar{\mathbb{C}}$
par l'adjonction du nombre infini complexe ∞ .

Au seizième siècle, le génie du Flamand *Alertator* montra comment représenter la Terre à nouveau reconnue sphérique², par ce qu'il nomma un *Atlas* (de *cartes* planes). La sphère de Riemann n'exige pas de très savante cartographie, puisque le Plan de Gauss représente déjà la sphère numérique complexe tout entière ... à l'unique exception du nombre complexe infini ∞ . Installé sur une feuille de papier, lieu d'expression élu de réflexions profondes comme des plus doux messages, le plan de Gauss \mathbb{C} restera le champ de prédilection de nos ébats imaginaires. Afin de bénéficier des agréments apportés par le nombre infini complexe ∞ , nous lèverons de temps à autre les yeux vers le Ciel, afin de saisir quelque utile rayon de lumière

Aide-toi, Riemann t'aidera !

²Acquise six siècles avant notre ère, la rotondité de la Terre fut ensuite perdue par l'humanité, avant d'être définitivement scellée par Christophe Colomb.

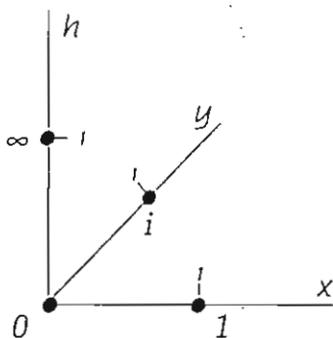
Revoici le plan de Gauss ,



avec

la demi-droite numérique \mathbb{R}^+ des normes ou nombres réels positifs,
le cercle Γ des angles, ou nombres complexes c de norme $|c| = 1$,
et, à titre d'exemple, la *cosinusoïde* polaire *cos-en-Gauss* (dans l'intimité *cos*).

Le repère spatial, orthonormé, $0 \ 1 \ i \ \infty$



facilitera l'accueil simultané du plan de Gauss \mathbb{C} et de la sphère de Riemann $\bar{\mathbb{C}}$ [d'équateur Γ] présentée en la page suivante .

L'axe Ox s'identifie à la droite numérique réelle \mathbb{R} ;

l'axe Oy emprunte la droite numérique imaginaire pure $i\mathbb{R}$;

l'axe zénithal Oh repère les *ni-veaux* ou *altitudes*.

Ce repère est le regard du spectateur qui voit face à lui le plan *frontal* Ohx , dont les dessins, *en majesté*, lui apparaissent, en vraie grandeur.

Les coordonnées x et y régissent *largeur* et *profondeur*.

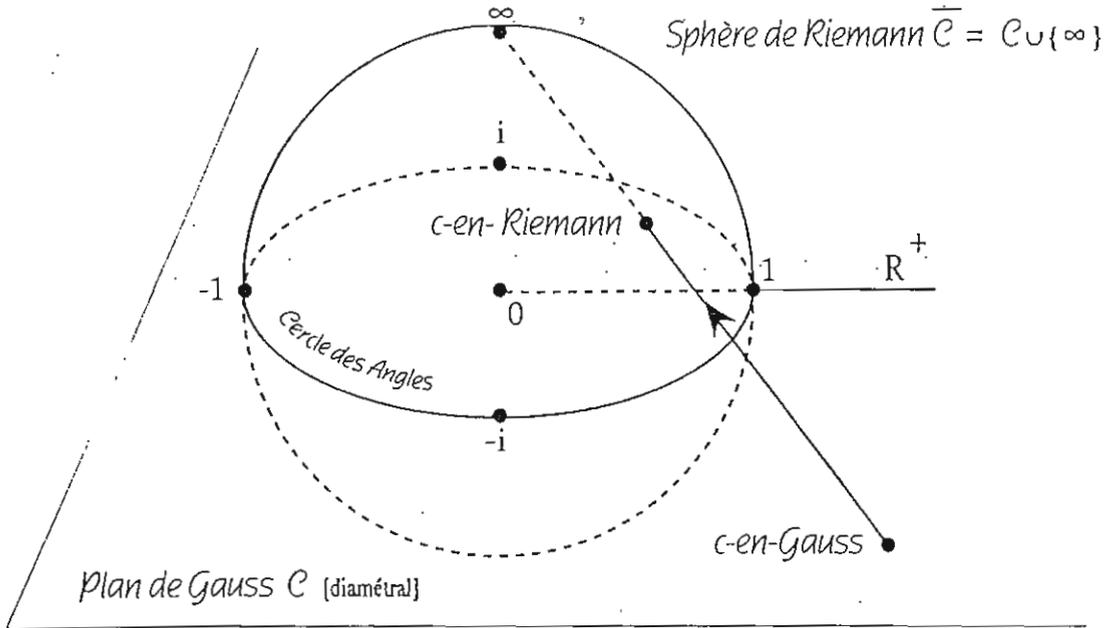
Le plan Oxy fixe la direction horizontale.

La troisième coordonnée (notée h , et non z , afin de ne pas tamponner la notation classique $z = x + iy$) se nomme volontiers *hauteur*, ou *altitude*.

Les droites perpendiculaires au plan de front se disent *de bout*.

L'axe Ox indique la direction de la *ligne de terre*.

Le plan Ohy fixe la direction *de profil*.



Par projections inverses de centre ∞ , le plan de Gauss et la sphère de Riemann, privée de son Pôle Nord, se bijectent mutuellement. Tout nombre complexe $c \in \mathbb{C}$ se dote ainsi de deux représentations géométriques, nommées en cas de besoin

c-en-Gauss et *c-en-Riemann*

en bijection par projection de centre ∞ . La sphère de Riemann se présente comme le prolongement complexe achevé $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ du plan de Gauss \mathbb{C} , par adjonction du nombre complexe infini ∞ .

On est passé du fantomatique drap de lit infini du plan de Gauss, à la représentation riemannienne en sphère, symbole médiéval compact de bonheur.

En le repère tridimensionnel cartésien adopté

$$\text{GAUSS} \equiv h = 0$$

$$\text{RIEMANN} \equiv x^2 + y^2 + h^2 = 1$$

$$\Gamma \equiv x^2 + y^2 = 1 \quad \wedge \quad h = 0$$

L'équation $x^2 + y^2 = (1-h)^2$ [deux variables et un paramètre] du cercle de niveau h du cône projecteur $\infty\Gamma$, de sommet ∞ et de directrice Γ , fait encore office d'équation [à trois variables] du cône projecteur lui-même

$$\infty\Gamma \equiv x^2 + y^2 = (1-h)^2$$

L'équation de *cos-en-Gauss*, relative au repère orthonormé $(0, 1, i)$ de GAUSS se trouve en disant le carré de la distance du centre au point courant égal au carré du rayon :

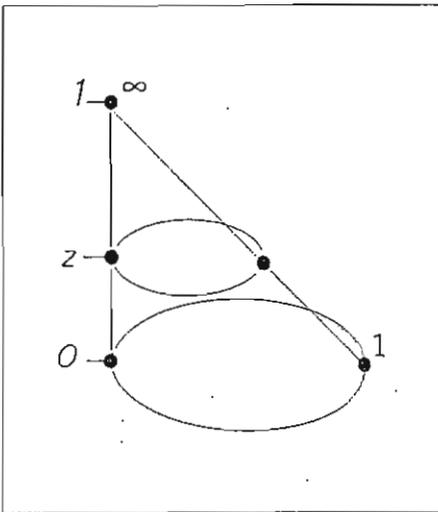
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

soit

$$y^2 = x(1-x)$$

∞ COS

Plus généralement, la courbe de niveau h du cône projecteur ∞ COS de sommet ∞ et de directrice *cos-en-Gauss* se trouve de la même manière :



$$\left(x - \frac{1-h}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1-h}{2}\right)^2$$

et mène, par réunion \cup_h ,

à l'équation du cône ∞ COS

lui-même :

$$\infty \text{ COS} \equiv y^2 = x(1-x-h)$$

THÉORÈME

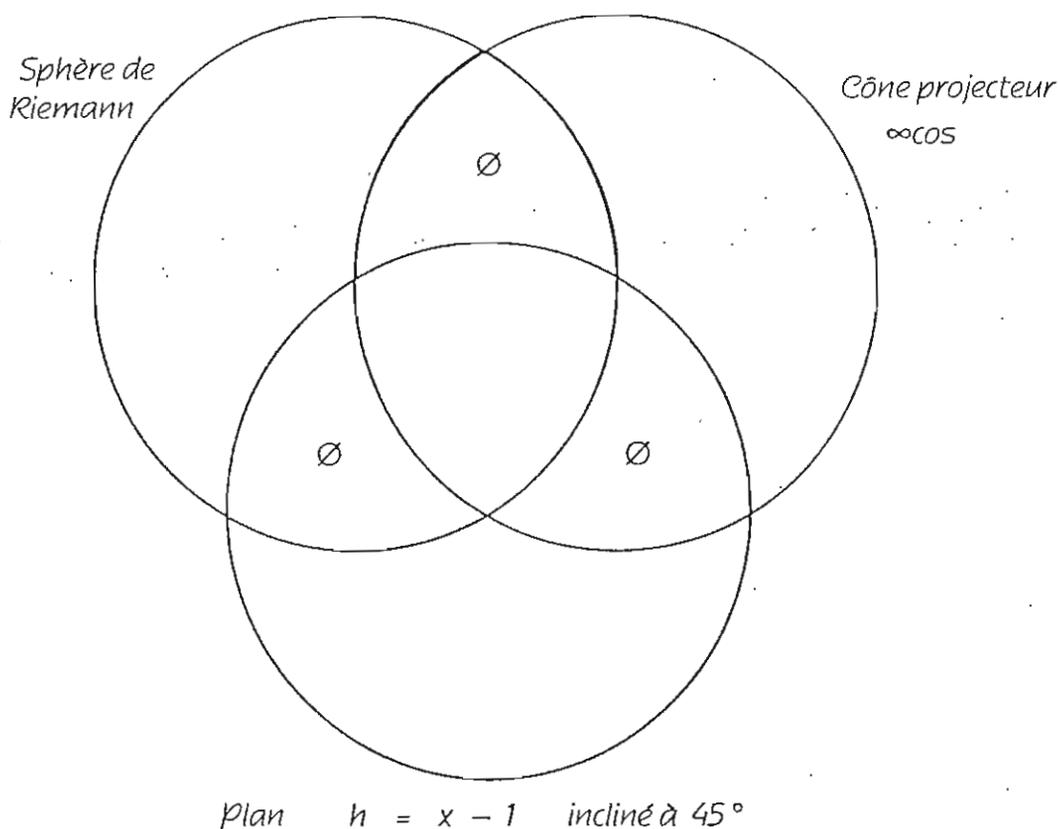
L'image *cos-en-Riemann* de *cos-en-Gauss*
par la projection GAUSS \rightarrow RIEMANN de centre ∞
est le cercle de la sphère de Riemann
de plan $h = x - 1$

Ce théorème met en jeu ces trois surfaces, la sphère \bar{C} , le cône projecteur ∞ COS, et le plan $h = x - 1$, brièvement nommées simplement *sphère*, *cône*, *plan*.

Nous allons prouver qu'elles concourent comme *trois droites concourantes* :

l'intersection des trois égale celle de tout couple d'entre elles

Ce qui revient à prouver la vidéité de trois plages de leur diagramme de Venn



où le signe \emptyset signale vides les plages qu'il marque.

□

LEMME 1

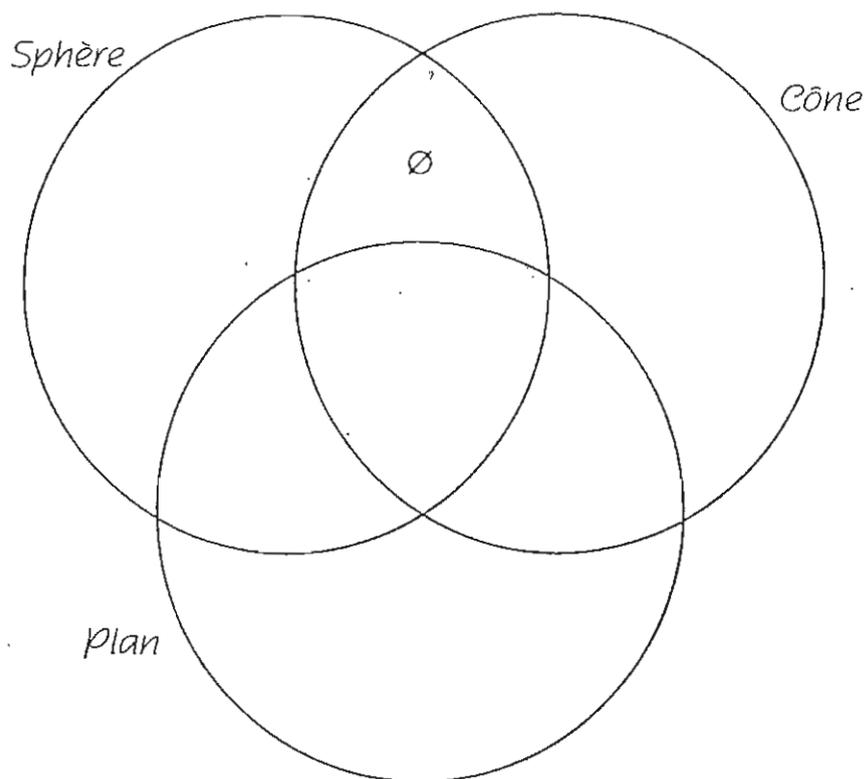
$$\text{sphère} \cap \text{cône} \subseteq \text{sphère} \cap \text{plan}$$

PREUVE

$$\begin{aligned} \text{Sphère } \bar{C} &\equiv x^2 + y^2 = (1-h)(1+h) \\ \text{Cône projecteur } \infty\text{COS} &\equiv x^2 + y^2 = (1-h)x \end{aligned}$$

Tout point (x, y, h) , avec $h \neq 1$ de l'intersection de la sphère et du cône projecteur appartient au plan $h = x - 1$ ■

Ce qu'EULER-VENN dessine



Reste donc à prouver :

LEMME 2

$$\text{Sphère} \cap \text{Plan} = \text{Cône} \cap \text{Plan}$$

PREUVE

Porter $h = x - 1$

dans

l'équation de la sphère

$$x^2 + y^2 + h^2 = 1$$

ou

dans l'équation du cône

$$x^2 + xh + y^2 - x = 0$$

entraîne dans les deux cas

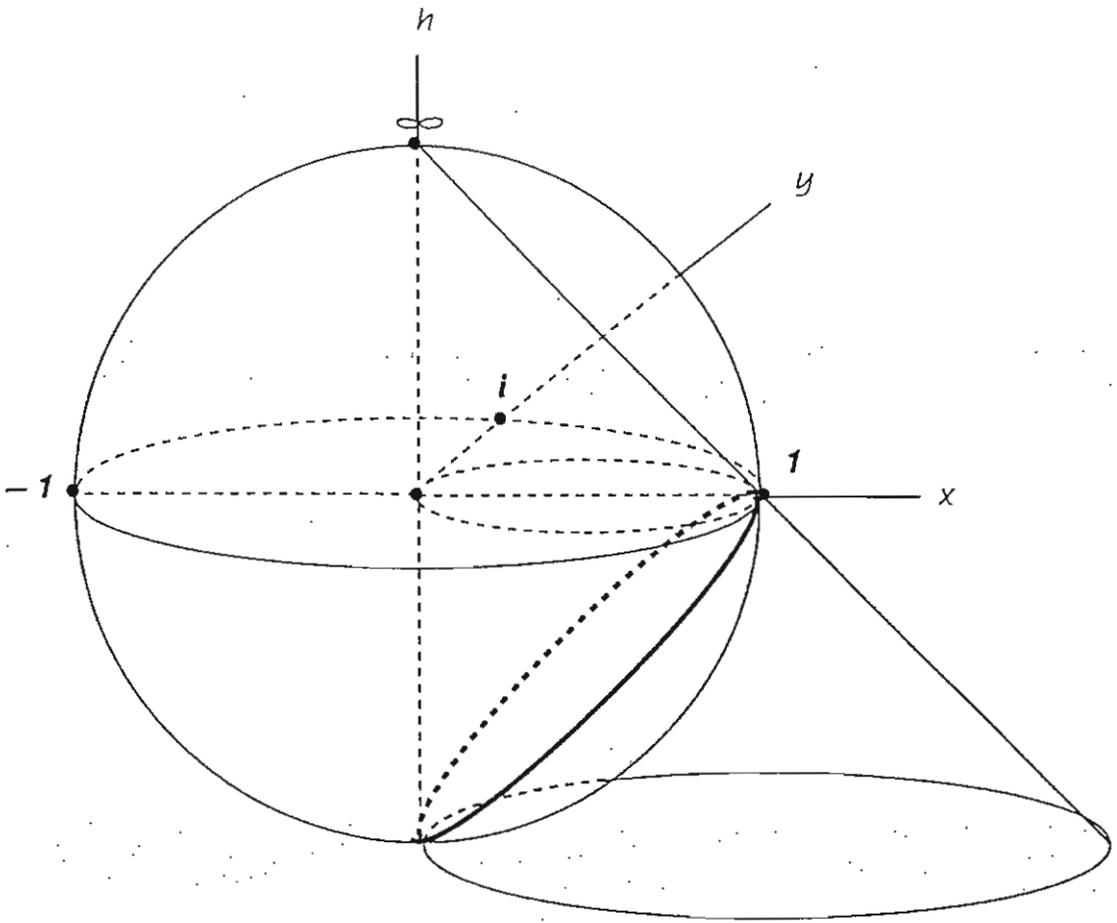
$$2x^2 + y^2 - 2x = 0$$

■

Chacun reconstruit le Monument à sa manière;
l'essentiel consiste à n'utiliser que des pierres authentiques.

MARGUERITE YOURCENAR
Interview à la Télévision neerlandaise

Plan de Gauss,
Sphère de Riemann
Cône des cosinus.



LE CÔNE DES COSINUS ∞ -COS

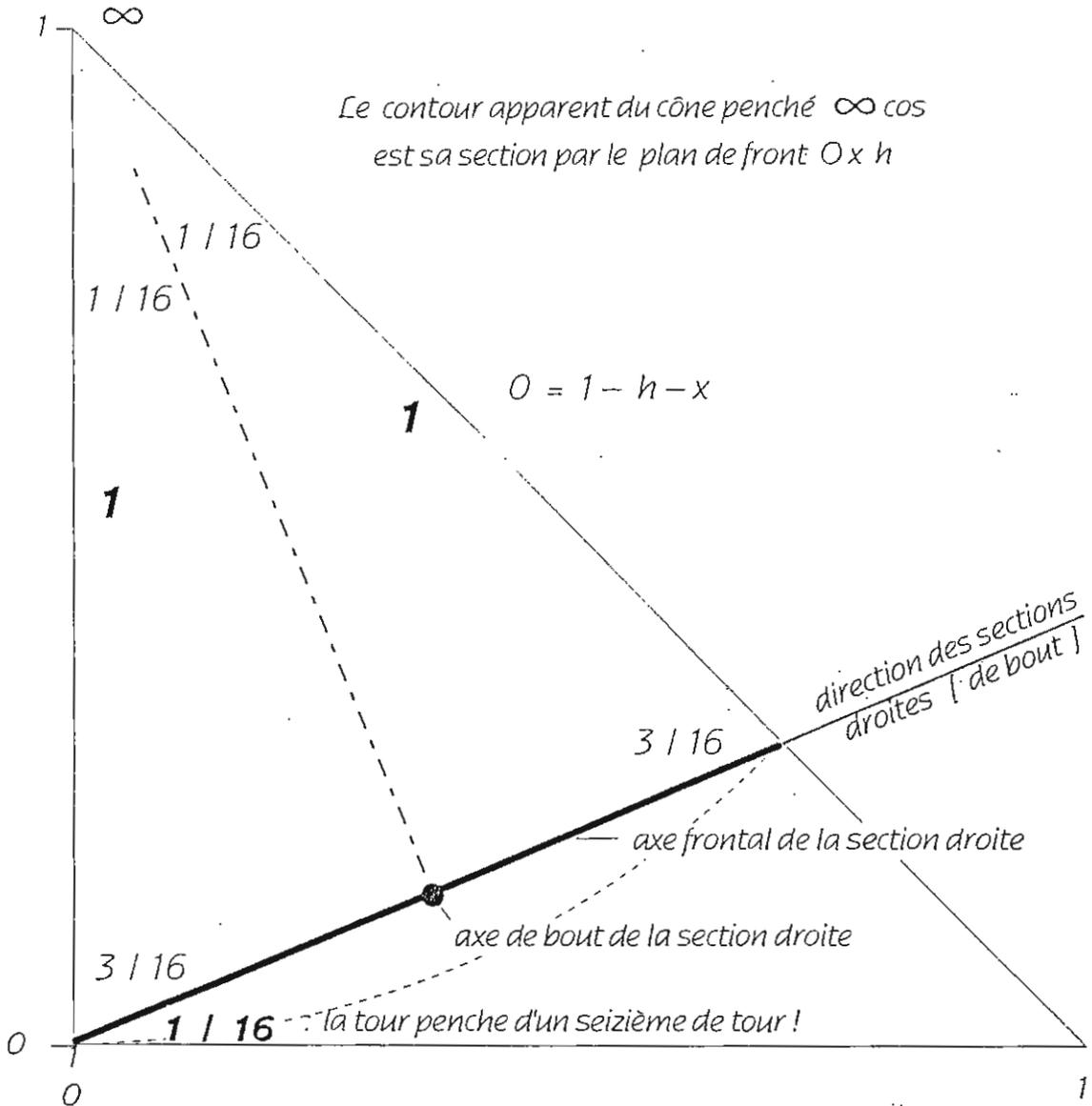
est le monument qui célèbre le passage

du cercle cosinussoïde horizontal [pointillé] du plan de Gauss

au cercle coslnusoïde [oblique gras] de la sphère de Riemann

Tour penchée des cosinus

Le petit carton de la page 31 montre d'emblée que le cône projecteur $\infty \cos$ est une tour penchée ... pour le trièdre trirectangle d'accueil adopté.

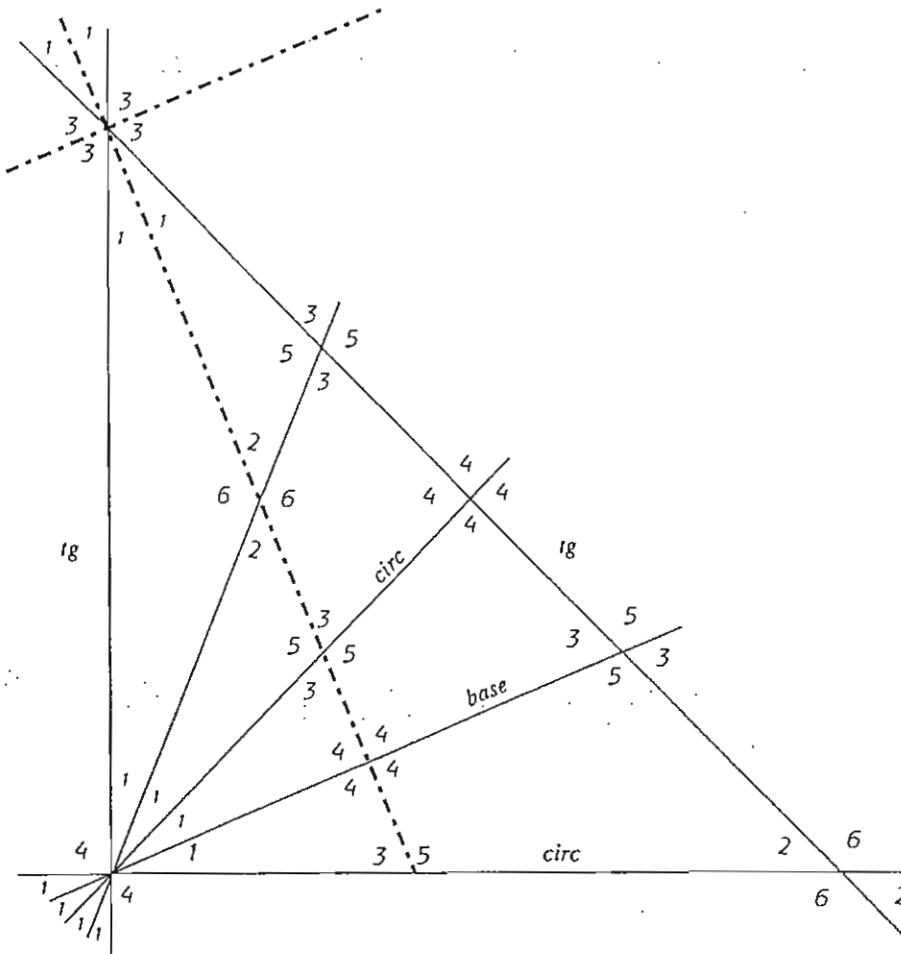


La conique dégénérée d'équation $O = x(1 - x - h)$ est le contour apparent du cône $\infty \cos \equiv y^2 = x(1 - x - h)$ qui admet le plan frontal de symétrie orthogonale $y = 0$.

Une base du cône $\infty \cos$ se présente, de bout, en côté d'octogone régulier convexe de rayon 1, de longueur $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

La page 41 évite ce recours à la mémoire.

Cette coupe de la tour des angles $\infty\cos$, par son plan frontal de symétrie orthogonale, ruisselle de la mesure de ses angles, en seizièmes de tour.



Le trait mixte dessine les plans *de bout* de symétrie orthogonale.

Les indications *tg, circ, base* qualifient les sections de bout concernées :

tg indique la tangence le long d'une des frontales qui silhouettent le cône $\infty\cos$.

circ signale des sections de bout *circulaires*.

base signale la direction des *bases*, ou *sections droites*.

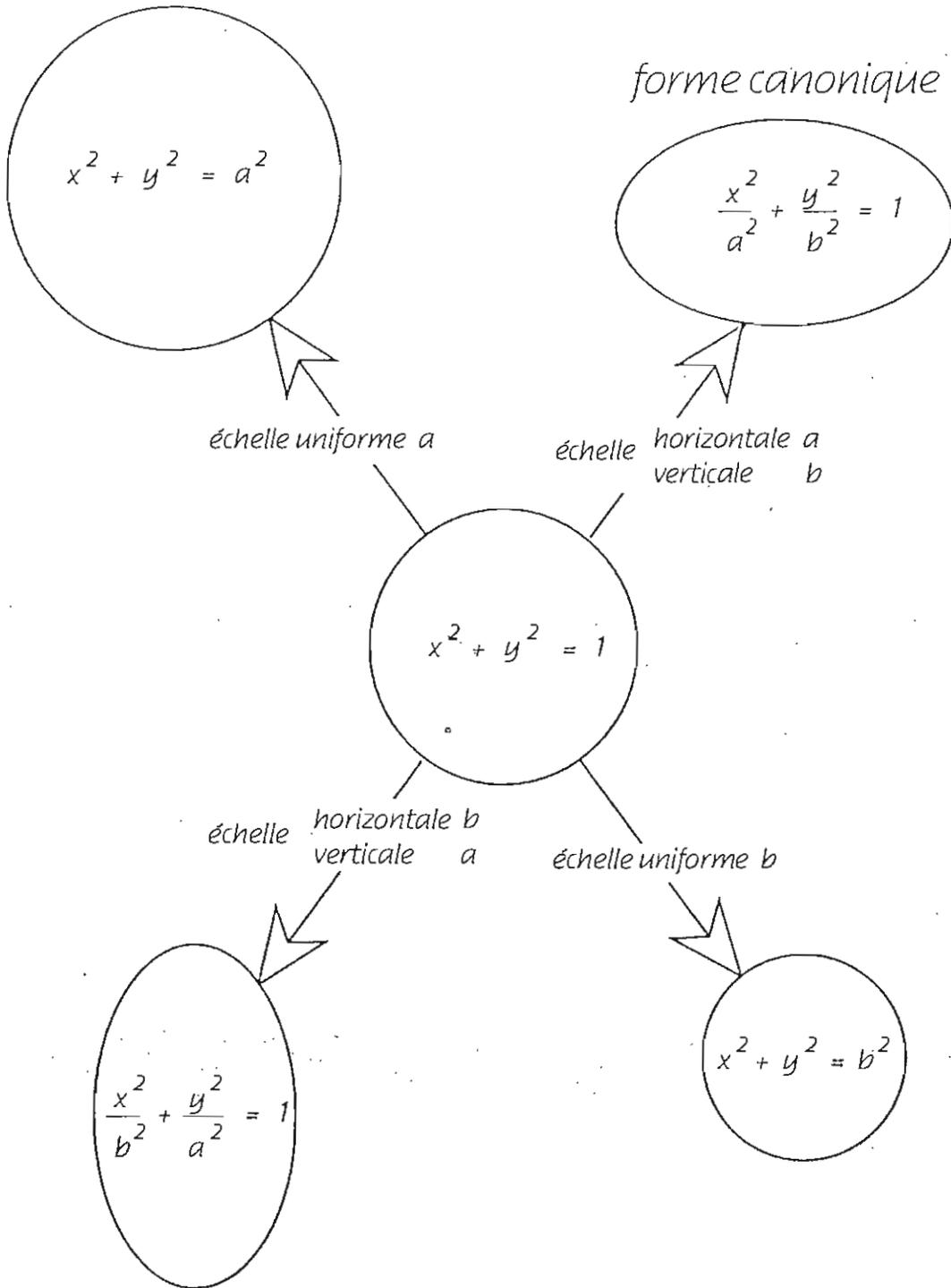
Ces bases sont des ellipses *semblables*,
c'est-à-dire dont les axes sont dans le même rapport

Ce qui attire l'attention sur des liens de parenté entre ellipses.

Pythagore et Descartes

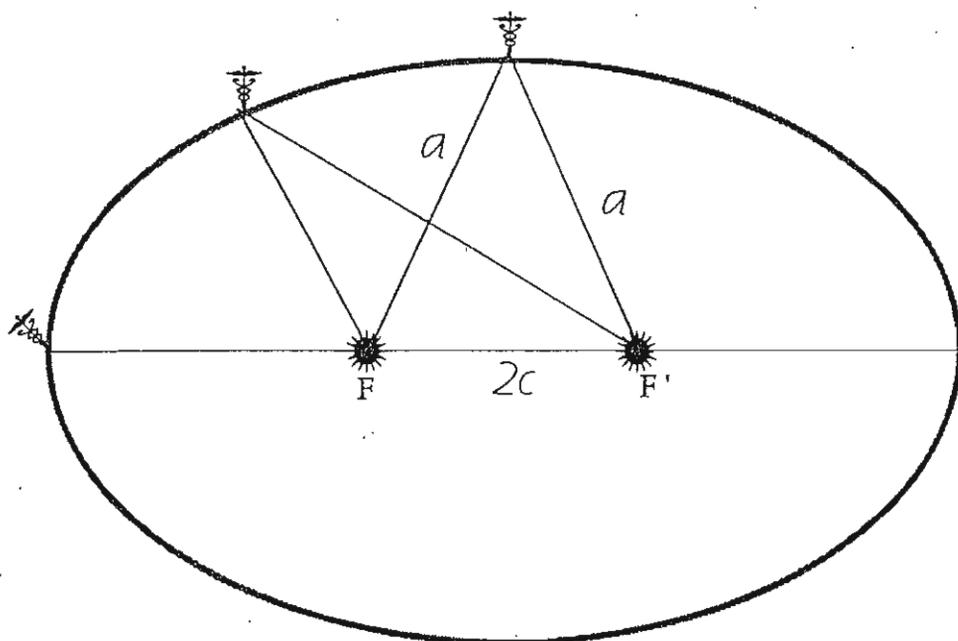
Les échelles qui conduisent du cercle unité aux ellipses

Conformément à un usage courant, les réels a et b vérifient $a \geq b \geq 0$

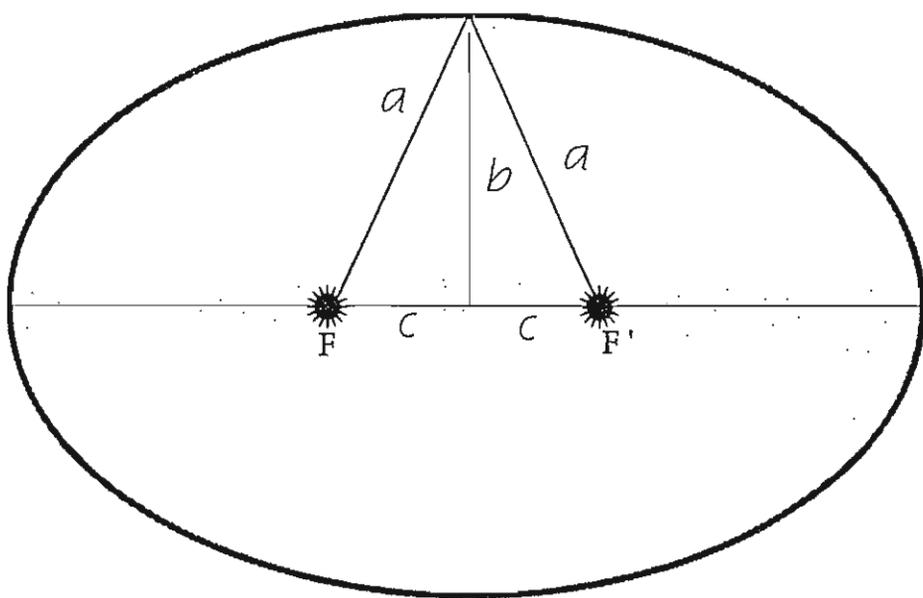


La forme canonique dégage le sentiment de sécurité de l'œuf sur table.
Du cercle unité, toute ellipse s'atteint par une échelle différenciée ou non.

Afin de tracer l'ovale d'un parterre, le Jardinier plante deux piquets F, F' ... et nomme $2c$ la distance entre les piquets : $FF' = 2c$. À ces piquets il fixe solidement les extrémités d'une corde de longueur $2a \geq 2c$ et trace l'ovale, à corde tendue, comme le suggère ce croquis :



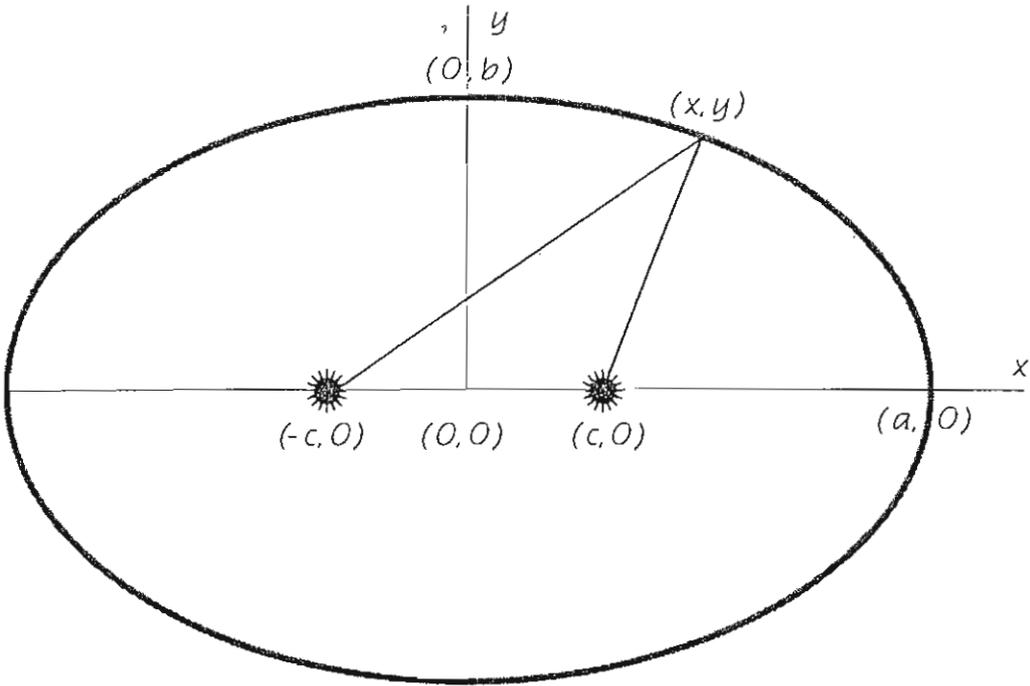
THÉORÈME — Cet ovale est l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



de foyers F, F' , de distance focale $FF' = 2c$, d'axe focal $2a$, de petit axe $2b$ liés par

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Preuve



Les étapes de cette preuve cartésienne sont indiquées ci-dessous.

[le signe $\uparrow 2$ commande l'élevation au carré]

Calculs intermédiaires en fêta à la seule idée de la participation active du lecteur.

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\uparrow 2 \quad a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

$$\uparrow 2 \quad a^2((x+c)^2 + y^2) = (a^2 + cx)^2$$

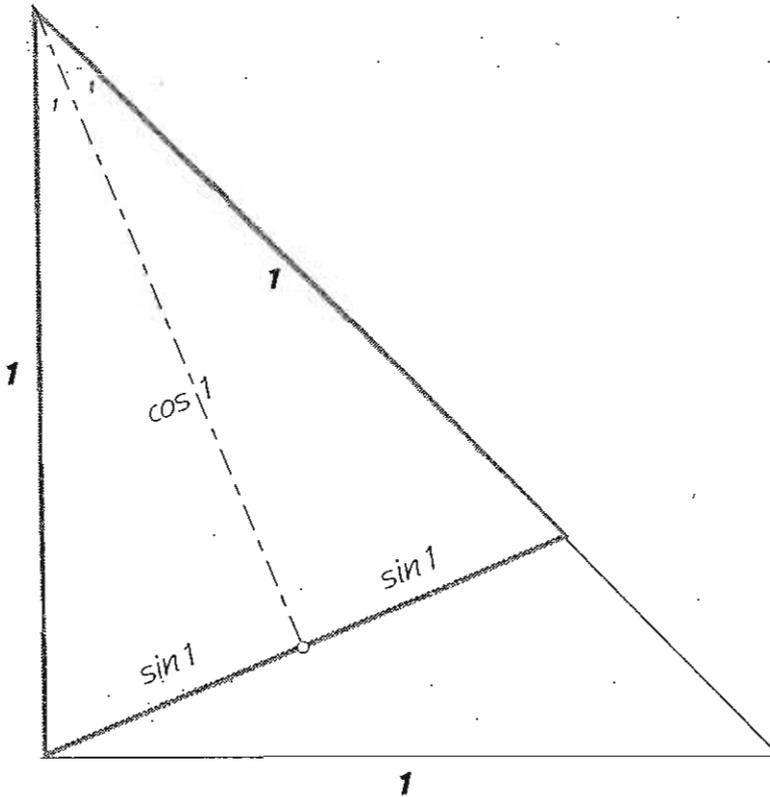
$$\Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$a^2 - c^2 = b^2 \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Le cône compact des cosinus ccc , réveille l'octogone régulier convexe de rayon 1

Le cône compact des cosinus (en abrégé ccc) se découpe dans le cône des cosinus, de la page 36, selon ce *contour apparent* frontal en trait grisé gras.



Le ccc est un cône droit

à plan de symétrie orthogonale de front : celui du tableau
 et plan de symétrie orthogonale de bout — — — — —

Comme le ccc penche d'un seizième de tour dans le sens de l'aiguille de la montre, il se redresserait par une rotation d'axe de bout d'un seizième de tour en sens inverse. A ce travail titanesque, nous préférons de paisibles mensurations ... permettant de reconstruire le ccc non penché.

Nous savions déjà de longueur 1, les trois segments frontaux marqués 1.

Des jeux de triangle rectangle placent les mensurations successives

$\sin 1$ (demi-axe frontal de la base du ccc) et $\cos 1$ (hauteur du ccc)

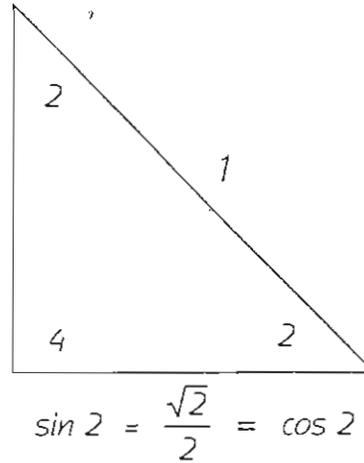
L'axe frontal de la base du ccc égale $2 \sin 1$

c'est-à-dire

le côté d'octogone régulier convexe de rayon 1

$$\sin 2 \quad \cos 2 \quad \sin 1 \quad \cos 1$$

Du simple au difficile,
commence par calculer,
ou recalculer,
 $\sin 2$ et $\cos 2$



La formule d'addition des cosinus (p 25) entraîne successivement

$$\cos 2 = 1 - 2 \sin^2 1 = 2 \cos^2 1 - 1$$

$$\sin 1 = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \cos 1 = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

Ainsi, axe frontal de la base et hauteur du cône compact des cosinus
recalculent côté et apothème de l'octogone régulier convexe inscrit à cercle de rayon 1.

LEMME

$$2 \sin 1 < \cos 1$$

La preuve résulte de la double équivalence

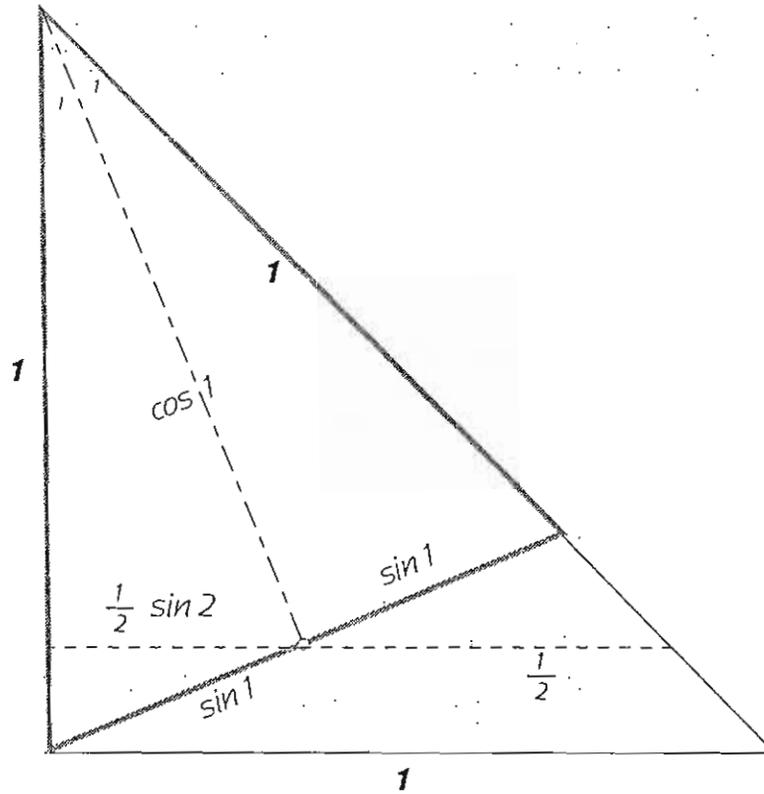
$$\begin{array}{ccc}
 2 \sin 1 & < & \cos 1 \\
 & \Downarrow & \\
 2 \sqrt{2 - \sqrt{2}} & < & \sqrt{2 + \sqrt{2}} \\
 & \Downarrow^1 & \\
 2 \sqrt{2} & < & 2 + \sqrt{2}
 \end{array}$$

et de l'évidence de la dernière ligne.

¹ Multiplication des deux membres par $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

Calcul de l'axe de bout de la base du cône compact des cosinus

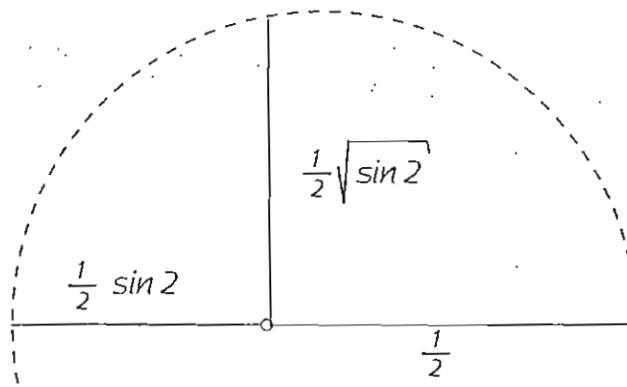
Se trace -----, vue de bout, la section circulaire du ccc par le plan horizontal qui contient l'axe de bout de la base du ccc.



Comme l'aire du grand triangle rectangle de gauche égale $\frac{1}{2} \sin 1 \cos 1 = \frac{1}{4} \sin 2$, la hauteur relative à l'hypoténuse égale $\frac{1}{2} \sin 2$.

Sur ce même dessin, le théorème de Thalès place $\frac{1}{2}$.

Ces résultats se portent sur ce dessin de la section circulaire -----



avec le demi-axe de bout de la base du ccc,
aussitôt calculé $\frac{1}{2} \sqrt{\sin 2}$ par moyenne multiplicative.

Nommant brièvement les axes de la base du cône des cosinus par leurs longueurs

$$2 \sin 1 \quad \text{et} \quad \sqrt{\sin 2} :$$

l'axe $\sqrt{\sin 2}$ est la moyenne multiplicative
de l'axe $2 \sin 1$ et de la hauteur $\cos 1$ du cône,
ce qui assure déjà l'appartenance $\sqrt{\sin 2} \in [2 \sin 1, \cos 1]$

L'inégalité $2 \sin 1 < \cos 1$ permet de préciser

$$2 \sin 1 < \sqrt{\sin 2} < \cos 1$$

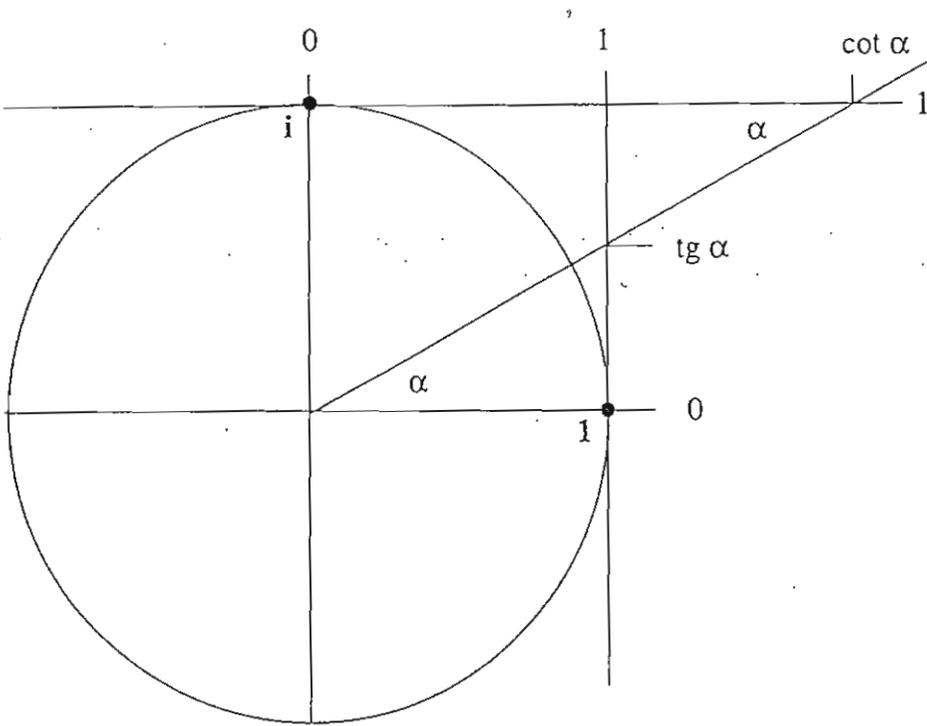
THÉORÈME — *Les axes de la base de la tour des cosinus sont plus petits que sa hauteur. L'axe focal égale la moyenne multiplicative de la hauteur de la tour et de l'axe non focal.*

Cône des cosinus				
Axe non focal de la base		Axe focal de la base		Hauteur du cône
$2 \sin 1$	<	$\sqrt{\sin 2}$	<	$\cos 1$
L'axe focal de la base est la moyenne multiplicative de l'axe non focal de la base et de la hauteur du cône.				

*La base du cône compact des cosinus
focalise l'attention sur les ellipses : ..
... lesquelles entretiennent des rapports harmonieux
avec les fonctions circulaires,
et en particulier avec la fonction tangente,
géométriquement définie en la page suivante.
Alors que que \sin et \cos marquent leurs valeurs sur un axe mobile,
la tangente marque les siennes sur un axe fixe.*

L'invitée inspire le choix de la structure d'accueil.

La fonction circulaire tangente et sa sœur cotangente



D'où aisément,

par similitude de triangles :

pour tout angle α , ni 0, ni $\frac{\pi}{2}$, ni π , ni $\frac{3\pi}{2}$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

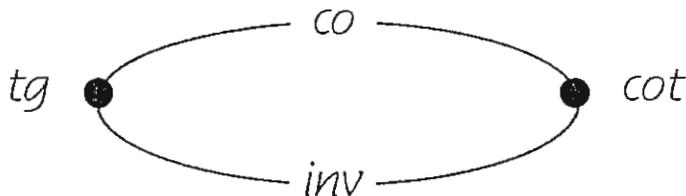
$$\operatorname{cot} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

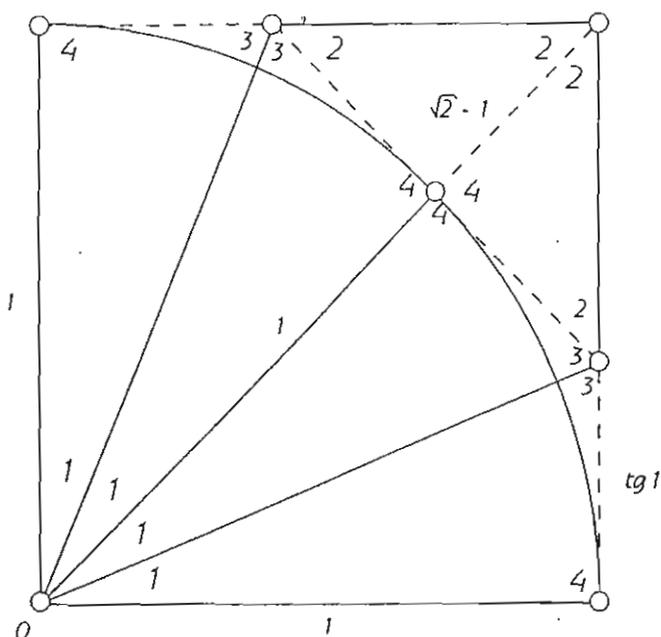
$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cot} \alpha = 1$$

et, par les formules d'addition de la page 25 :

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

Tangente et cotangente sont sœurs inverses :



$tg\ 1 \quad tg\ 2 \quad tg\ 3 \quad tg\ 0$


En ce carré de côté 1, découpé du Plan de Gauss,
les cinq segments $\text{O} \text{---} \text{O}$ ont même longueur.

Les longueurs de deux d'entre eux
égalent respectivement $\sqrt{2} - 1$ et $tg\ 1$;

$$\begin{aligned} & \text{d'où} \\ & tg\ 1 = \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

Pythagore y lit encore directement

$$(1 + tg\ 1)^2 = 2$$

d'où

$$tg^2\ 1 = 1 - 2\ tg\ 1$$

Le dessin confirme $tg\ 2 = 1$ et $tg\ 0 = 0$

Les angles complémentaires 1 et 3 ont
tangentes inverses mutuelles,

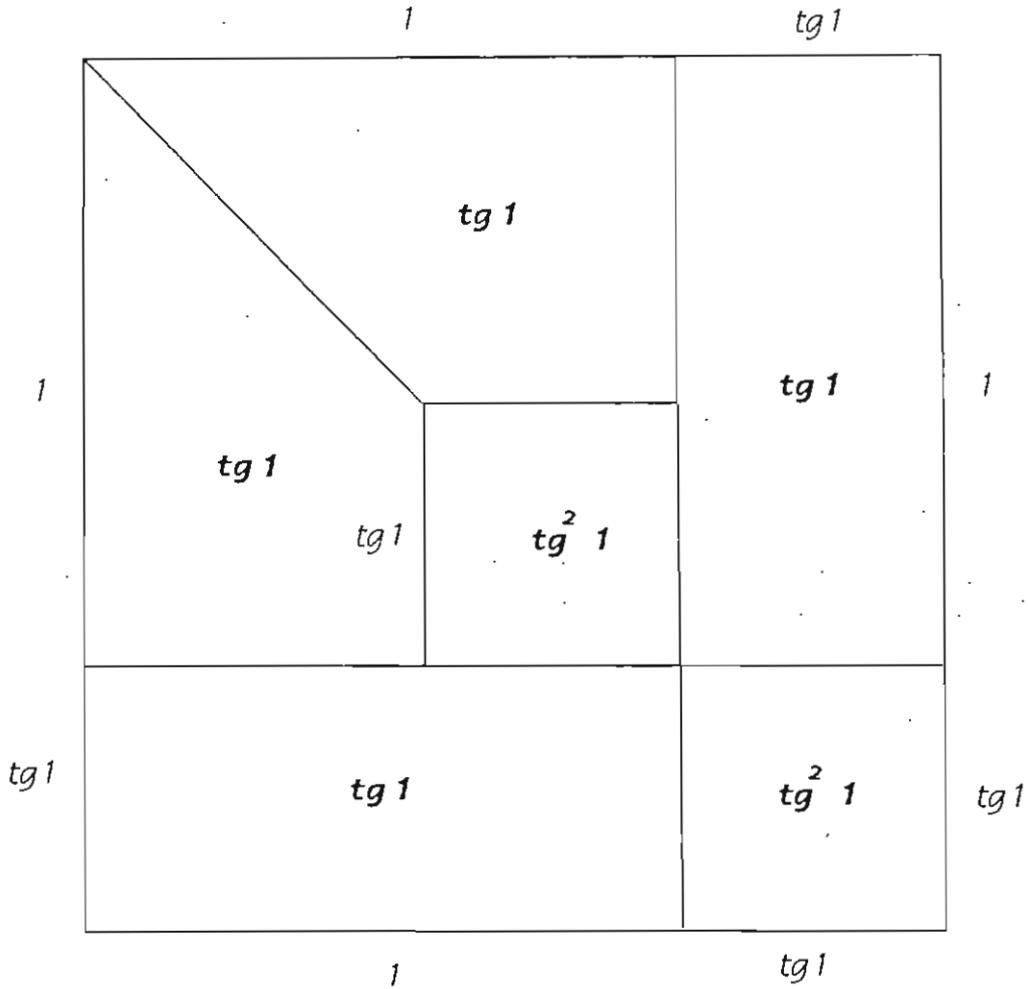
d'où

$$tg\ 3 = \frac{1}{tg\ 1} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

Selon LE ROBERT, le mot *idée* vient ... de mots anciens signifiant ... *forme visible*.

De la mathématique se met volontiers en *idées* grâce aux vues que lui renvoient des structures d'accueil telles que diagrammes d'Euler-Venn, graphes de flèches, dessins de géométrie euclidienne plane ...

La structure d'accueil que voici



concerne le nombre *tg 1*, présenté en une harmonie de sonorités linéaires (signalées en caractères fins) et de sonorités aréolaires (indiquées en grasse).

Les itinéraires d'exploration sont laissés au choix du lecteur, afin de visualiser des résultats acquis en les pages précédentes —voire d'en découvrir de nouveaux.

Ces visualisations témoignent du profond enracinement pythagoricien de *tg 1*.

$$tg^2 1 + 2 tg 1 = 1 \quad \& \quad (1 + tg 1)^2 = 2$$

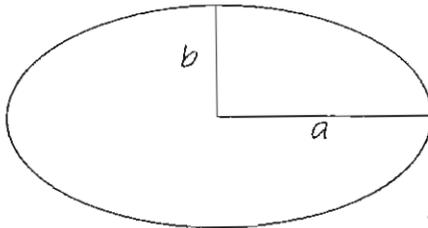
$$tg 1 \text{ et } 2 + tg 1 \text{ inverses mutuels} \quad \text{car} \quad tg^2 1 + 2 tg 1 = 1$$

$$tg 1 = \sqrt{2} - 1 = \text{demi-côté d'octogone régulier convexe circonscrit à un cercle de rayon } 1$$

Excentricité de la base du cône compact des cosinus

Une ellipse nous révèle sa classe de similitude en nous déclinant

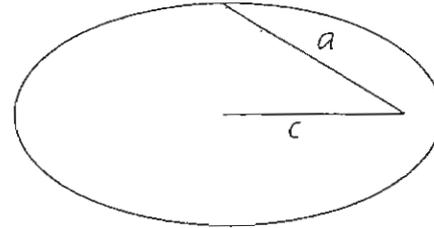
à gauche



son aplatissement

$$\frac{b}{a}$$

à droite



son excentricité

$$\frac{c}{a}$$

qui

par

aplatissement² + excentricité² = 1 se définissent mutuellement

THÉORÈME .

L'excentricité de la base du cône compact des cosinus égale tg l

PREUVE

Compte tenu des caractéristiques du cône compact des cosinus (p43) l'excentricité de sa base se calcule

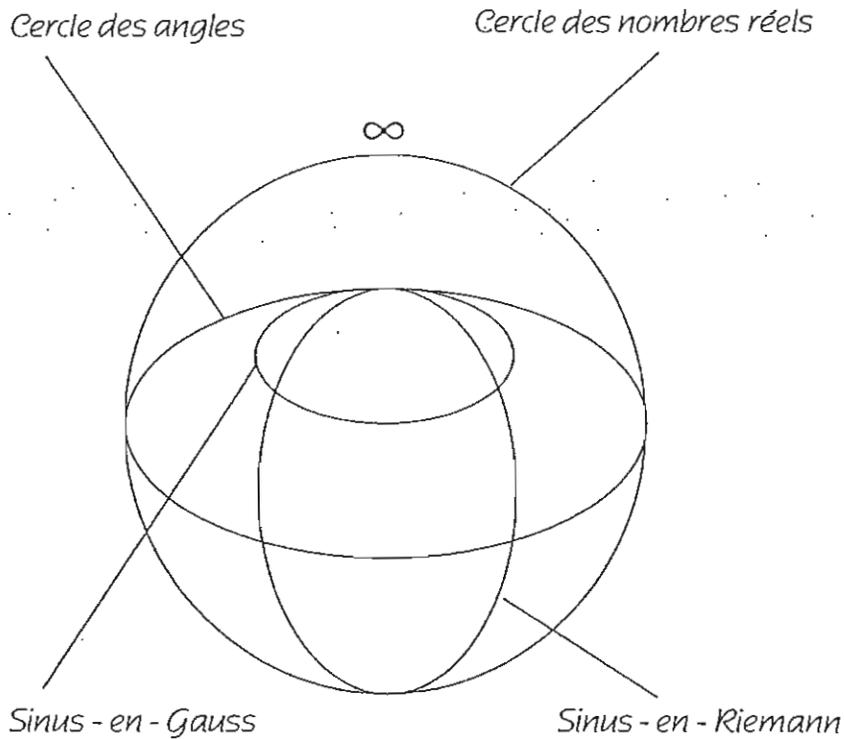
$$\sqrt{1 - \left(\frac{2 \sin 1}{\sqrt{\sin 2}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{4 \sin^2 1}{\sin 2}} = \sqrt{1 - 2 \operatorname{tg} 1} = \operatorname{tg} 1$$

(Dernière égalité en vertu de la page précédente !)

Ce théorème est un hommage à la subdivision hexadécimale du cercle des angles.



Du cosinus au sinus par rotation d'un quart de tour à gauche d'axe vertical.



Le plan de Gauss est le plan diamétral horizontal de cette sphère de Riemann.

L'axe de la rotation annoncée

comprend

le nombre complexe infini ∞ , pôle Nord de la sphère de Riemann

le nombre complexe zéro-en-Gauss, centre de la sphère de Riemann,

le nombre complexe zéro-en-Riemann, pôle Sud de la sphère de Riemann.

En cette sphère de Riemann,

le plan de Sinus-en-Riemann

est un toboggan qui descend de l'arrière vers l'avant,

de i -en-Riemann = i -en-Gauss à 0 -en-Riemann

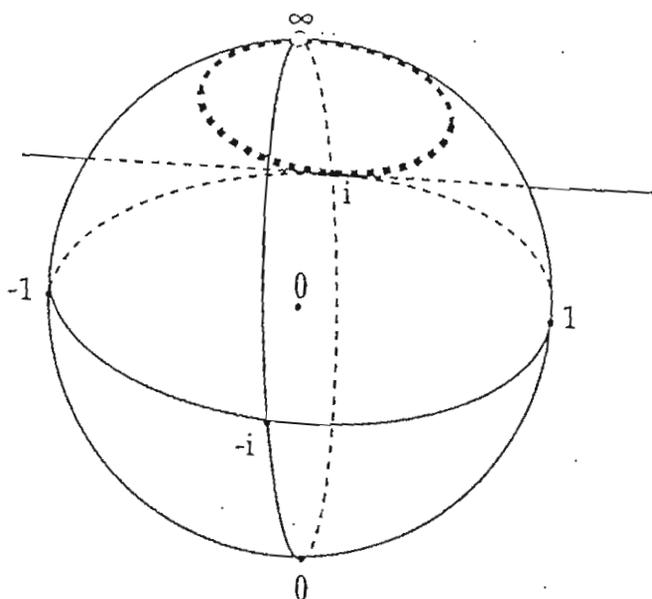
avec une pente de 45°

ou

2 seizièmes de tour.

*En le plan du sinus-en-Riemann :
droite horizontale = droite frontale*

Passant du Plan de Gauss à la Sphère de Riemann, le graphe rectiligne gaussien de la cosécante se projette sur la section de la sphère par le plan qui la contient et comprend le nombre ∞ .

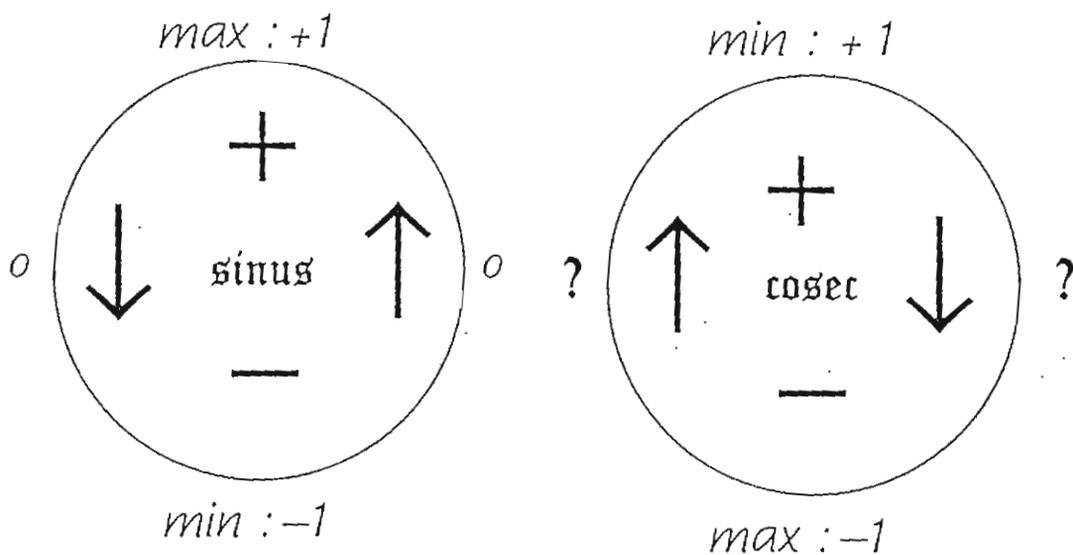


Ce schéma présente le graphe (polaire) de la cosécante :

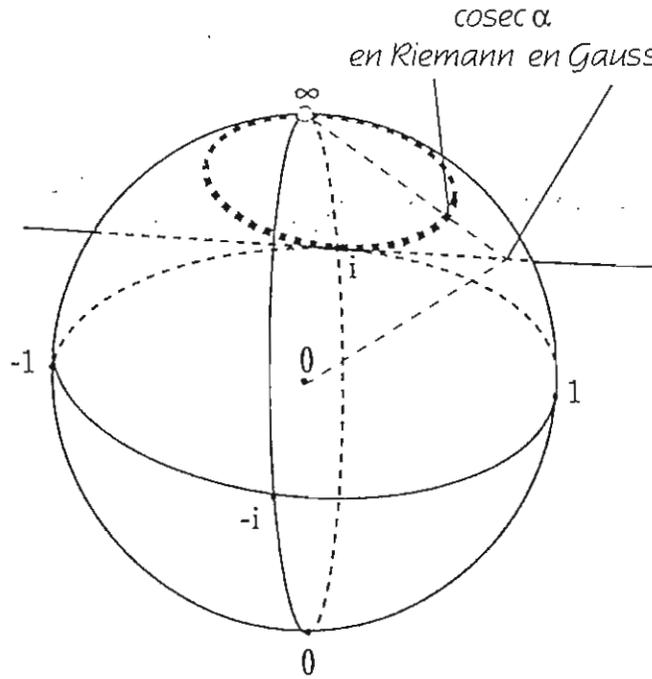
en plan de Gauss
la tangente rectiligne en i
au cercle des angles

en sphère de Riemann
(en ponctué gras),
le cercle de diamètre $\sqrt{2}$
privé de son point ∞
parcouru deux fois, à chaque
tour du cercle des angles.

La droite numérique réelle \mathbb{R} complétée en le cercle numérique réel $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, les blasons de la cosécante et du sinus s'inversent assez harmonieusement.



Quelles valeurs attribuer à la cosécante
en les angles nul = 0 et plat = ∞ ?



En Riemann: $\operatorname{cosec} 0 = \operatorname{cosec} \infty = \infty$

En la droite
numérique réelle
0 sépare les réels positifs et négatifs
aussi petits soient-ils en valeur absolue.

En le cercle des réels
de la sphère de Riemann
 ∞ sépare les réels positifs et négatifs
aussi grands soient-ils en valeur absolue.

Pour tout angle α ni nul ni plat $\sin \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = 1$,
L'ingénue levée de la restriction qui frappe cet énoncé entraînerait

$$0 \cdot \infty = 1 = \infty \cdot 0$$

et

ce flagrant délit *sui generis* de non associativité

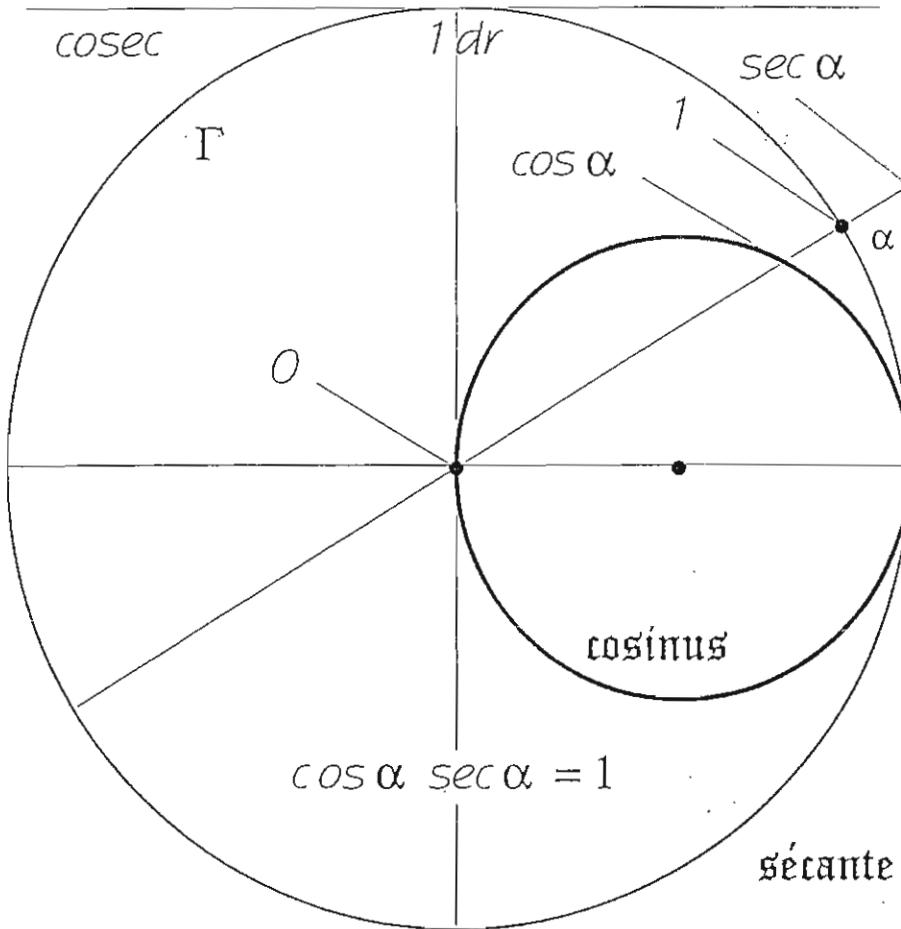
$$00 \cdot \infty = 0 \cdot \infty = 1 \neq 0 \cdot 1 = 0 \cdot 0 \infty$$

Nulle raison de mélancolie, à condition d'ouvrir le bon œil

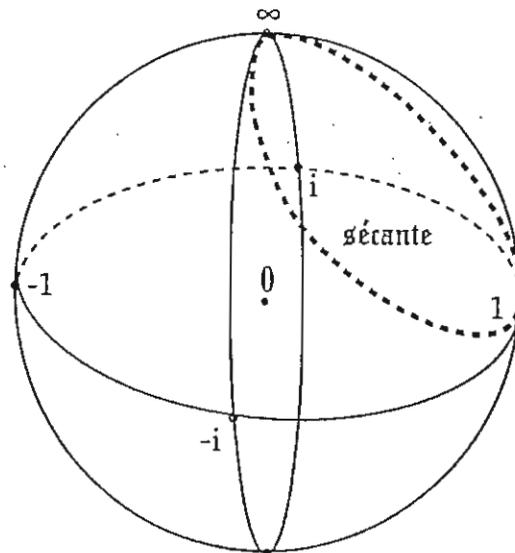


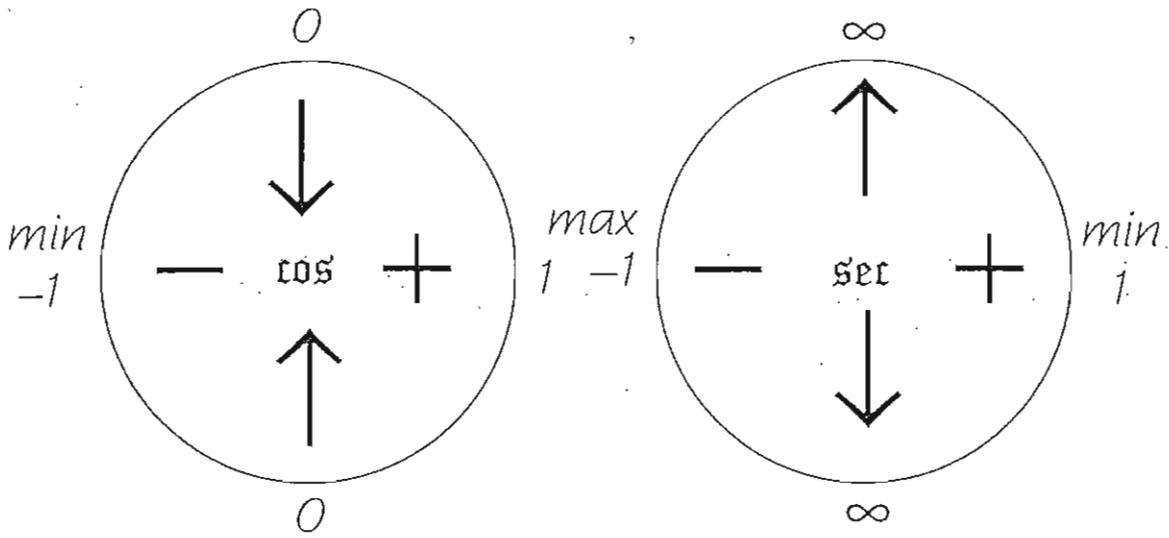
Miroir en la première bissectrice, cosec contemple sa sœur cocosec = sécante

En le plan de Gauss :



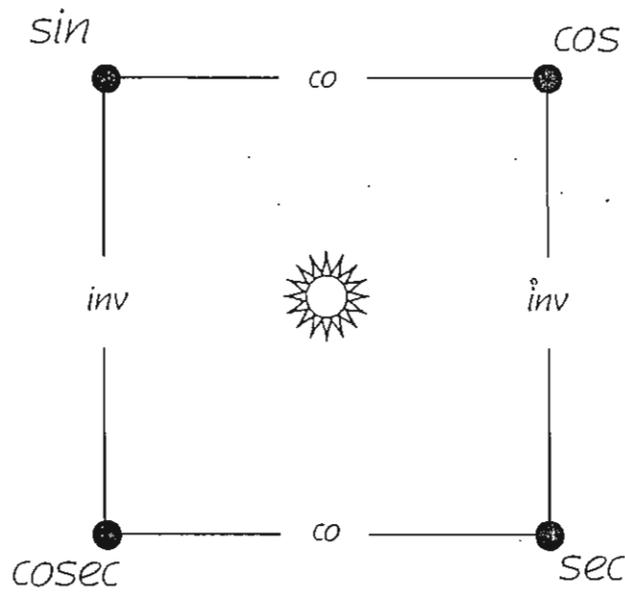
En la sphère de Riemann, le graphe polaire de la sécante est cercle de diamètre $\sqrt{2}$





Pour tout angle α , ni 4, ni 12 : $\sec \alpha \cdot \cos \alpha = 1$ ■

Ce carré commutatif de fonctions circulaires



articulé par l'involution co

et le passage inv à l'inverse multiplicatif

engendre

ce viergruppe compositionnel

de Klein

1	co	inv	$coinv$
co	1	$coinv$	inv
inv	$coinv$	1	co
$coinv$	inv	co	1

où $coinv$ note évidemment la composée commutative de co et inv .



Si les *Éléments* finissent en beauté
 par l'escalade du *pic des cinq polyèdres réguliers convexes*,
 l'immense troupeau qui suivit *Euclide*
 garde plutôt l'impression d'une multitude de dessins sur feuilles planes.



Le cubisme de *Pablo Picasso*
 est
 une peinture surréaliste plane d'une réalité tridimensionnelle.



Par *Rafaella Bombelli* et *Karl Friedrich Gauss 1777-1855*,
 le problème numérique de la résolution d'équations algébriques,
 conduisit au PLAN DE GAUSS \mathbb{C} des nombres complexes,
 complété par *BERNHARD RIEMANN 1826-66*
 en la SPHÈRE DE RIEMANN $\bar{\mathbb{C}}$
 grâce à l'adjonction du nombre complexe infini ∞ .



Certains dessins des pages précédentes
 représentent ces situations
 à la manière naïve des perspectives cavalières.



Dans la suite, nous recourrons aux moyens surréalistes des rabattements
 de la *Géométrie descriptive*
 de *Gaspard Monge 1746-1818*.



Les deux moitiés d'un angle ont même tangente

L'expression $tg \frac{\alpha}{2}$ condense la procédure

α	$/2$	tg
----------	------	------

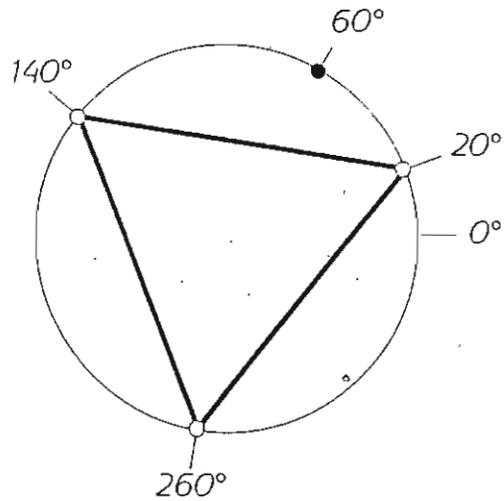
 à trois instructions

<i>introduire</i> l'angle α	<i>calculer</i> " le " demi	<i>calculer</i> la tangente
---------------------------------------	--------------------------------	--------------------------------

Guillemets guillotent unicité ingénument accordée à *demi*.

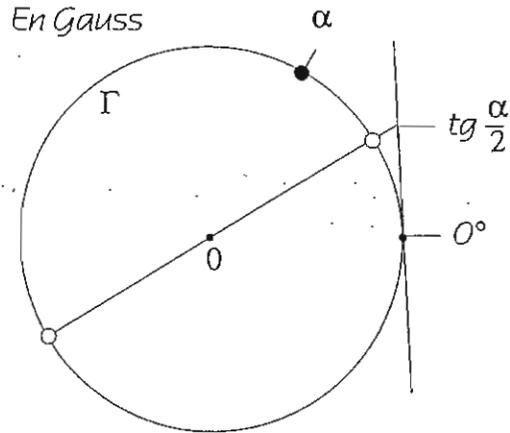
En Γ , cercle des angles du plan de Gauss C,
tout angle a deux demis, trois tiers, quatre quarts, cinq cinquièmes, mille millièmes,
un *unième* et nul *nullième* .

De manière plus précise
et plus analogique à la fois
— chef d'œuvre de morale en vérité,
selon Figaro —
tout angle α
inscrit dans Γ **son** triangle équilatéral,
dont les sommets sont
les trois tiers de l'angle α .
Ainsi fait ci-contre l'angle 60° [noir]
qui se construit ses trois tiers [blancs]



Ci-contre,

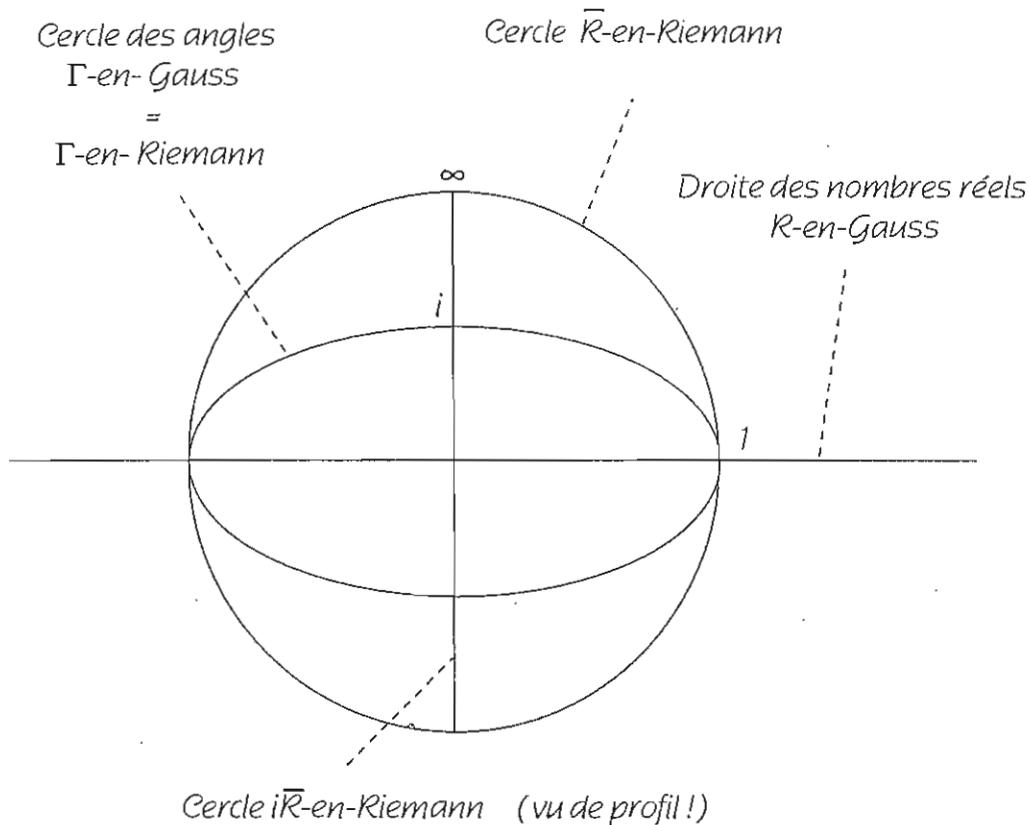
l'angle α [noir]
exhibe ses deux demis [blancs]
et montre qu'ils ont même tangente,
ce qui le justifie,
à ses yeux
de la noter d'emblée
 $tg \frac{\alpha}{2}$.



Sans en dire mot, nous avons utilisé la définition des trois tiers d'un angle :
 $20^\circ + 20^\circ + 20^\circ = 140^\circ + 140^\circ + 140^\circ = 260^\circ + 260^\circ + 260^\circ = 60^\circ$

Le Cirque angulonumérique $\Gamma, \bar{\mathbf{R}}$

Mettant le globe terrestre en atlas de cartes planes, Mercator procède de la sphère au plan. Le plan de Gauss concrétise l'imaginaire numérique. Compactifiant le plan de Gauss en ballon de foot, Riemann apprivoise l'infini. La *Géométrie descriptive* (1800) de GASPARD MONGE (1748-1818) permet de planifier et cinématiser la sphère numérique complexe de Riemann



par le *relèvement* [de Monge] de charnière \mathbf{R} du cercle horizontal Γ des angles (et de son plan) sur le cercle frontal $\bar{\mathbf{R}}$ des nombres réels (et son plan).

	Γ	\rightarrow	$\bar{\mathbf{R}}$:		
angle nul	0	\mapsto	réel 1	angle ¹ 8	\mapsto	réel -1
angle droit	4	\mapsto	réel ∞	angle ¹ 12	\mapsto	réel 0

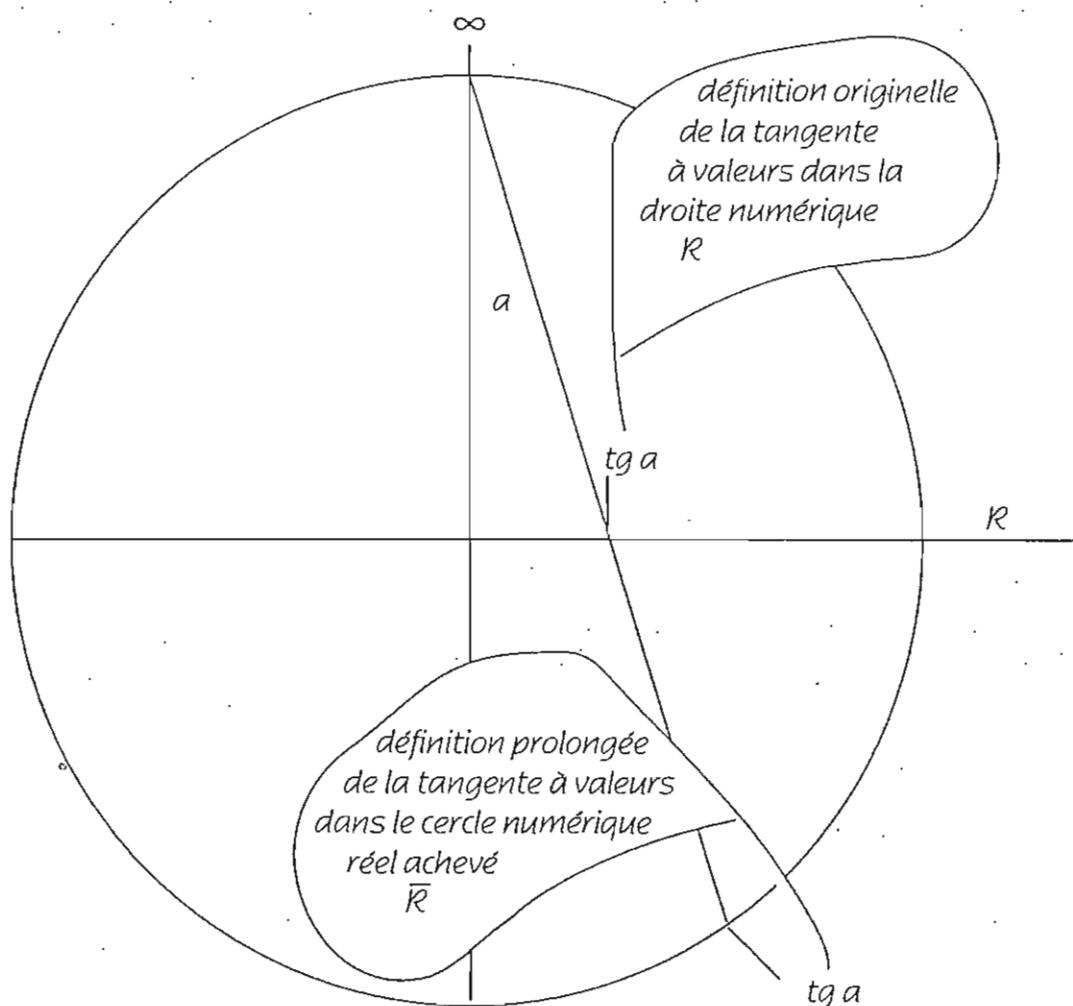
Ce relèvement (qui applique notamment l'unité imaginaire i sur le nombre complexe infini ∞) dote le cercle $\bar{\mathbf{R}}$ -en-Riemann d'une *double graduation*
angulaire intérieure importée du cercle des angles,
numérique extérieure importée de la droite réelle \mathbf{R} (en plus de l'indigène ∞)

définissant ainsi le cirque angulonumérique $\Gamma, \bar{\mathbf{R}}$

¹ Angles exprimés ici, en numération décimale usuelle, en seizièmes de tour

En le cirque angulonumérique réel Γ, \bar{R}

Fascinés par le nombre réel infini ∞ qui trône au sommet du cycle angulonumérique Γ, \bar{R} les angles prolongent la définition originelle des tangentes à valeurs réelles finies en une fonction $\Gamma \rightarrow \bar{R}$ à valeurs dans le cercle numérique réel \bar{R} .



Le prolongement s'opère par

$$tg.4 = \infty = tg.12$$

■

THÉORÈME — Le cirque angulonumérique Γ, \bar{R} impose ce protocole strict :

La tangente d'un angle suit le double de cet angle avec un déférent retard constant d'un quart de tour.

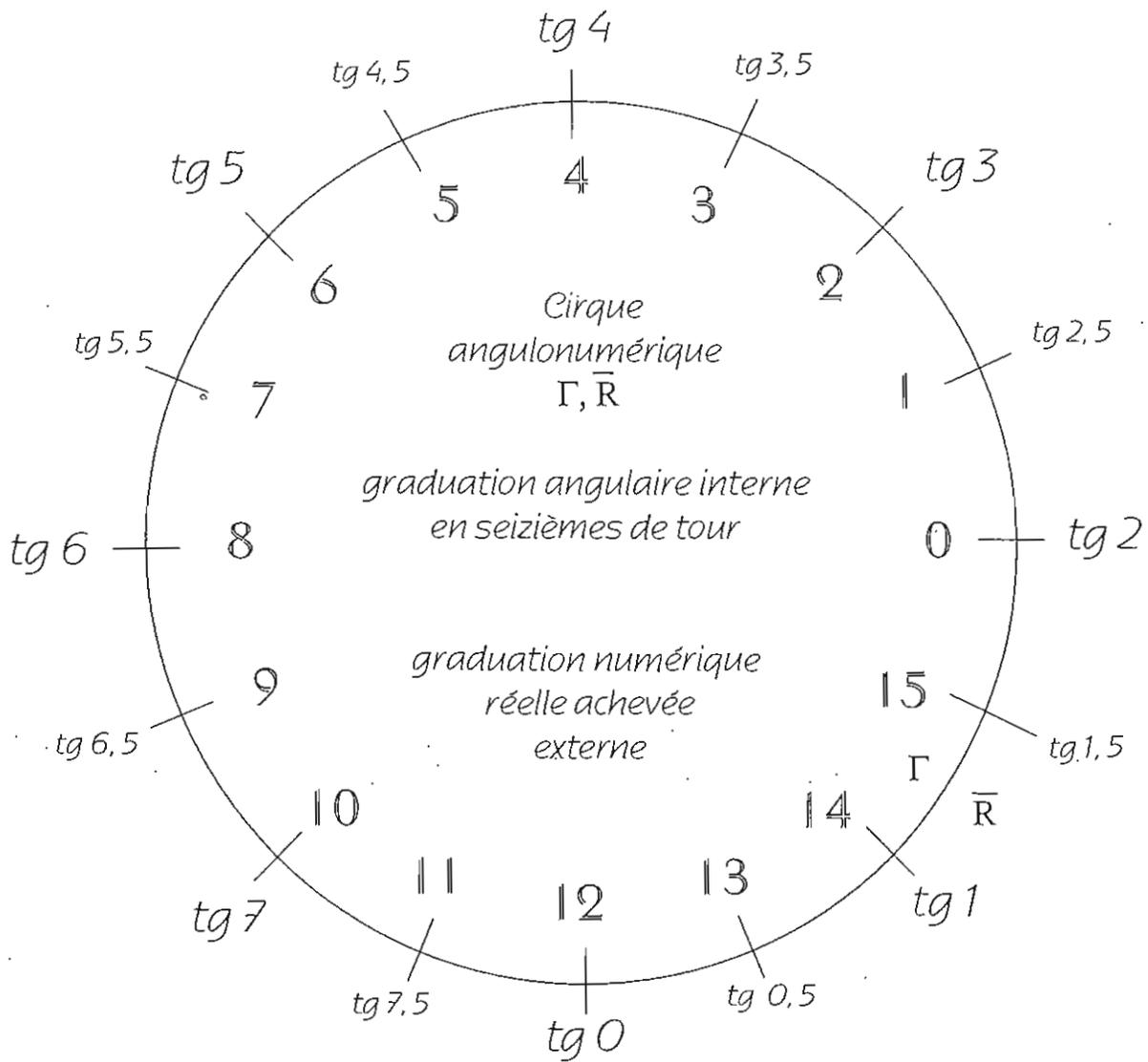
□

Vue panoramique du cirque angulonumérique Γ, \bar{R}

Le lemme fondamental de la page précédente nous a montré $tg \frac{\alpha}{2}$ suivant l'angle α comme sa chevelure suit la comète, avec un retard constant du quart de tour 4.

Ce qui permettra au couple bien uni (*angle, tangente d'angle-demi*) de graduer de concert le cirque angulonumérique Γ, \bar{R} .

Tandis que α se charge de la graduation angulaire **interne**
 $tg \frac{\alpha}{2}$ se charge de la graduation numérique réelle achevée **externe**
 avec un retard constant d'un quart de tour
 t'offrant cette vue panoramique



Contemple, commente

et justifie

Quarts de tour à droite en le cirque angulonumérique Γ, \bar{R}

1

On rappelle que $tg \frac{\alpha}{2}$ poursuit α avec un retard constant de l'angle droit 4

Et on pose $tg \frac{\alpha}{2} = r$

2

$tg \frac{\alpha-4}{2} = \dots = \frac{r-1}{r+1}$

... recourt à la formule de la tangente d'une somme angulaire. Salut fonction homographique

$r \mapsto \frac{r-1}{r+1}$

3

$\frac{r-1}{r+1}$

2 traduit quart de tour à droite en fonction homographique $r \mapsto \frac{r-1}{r+1}$ dont l'itérée égale $r \mapsto -r^-$ □

4

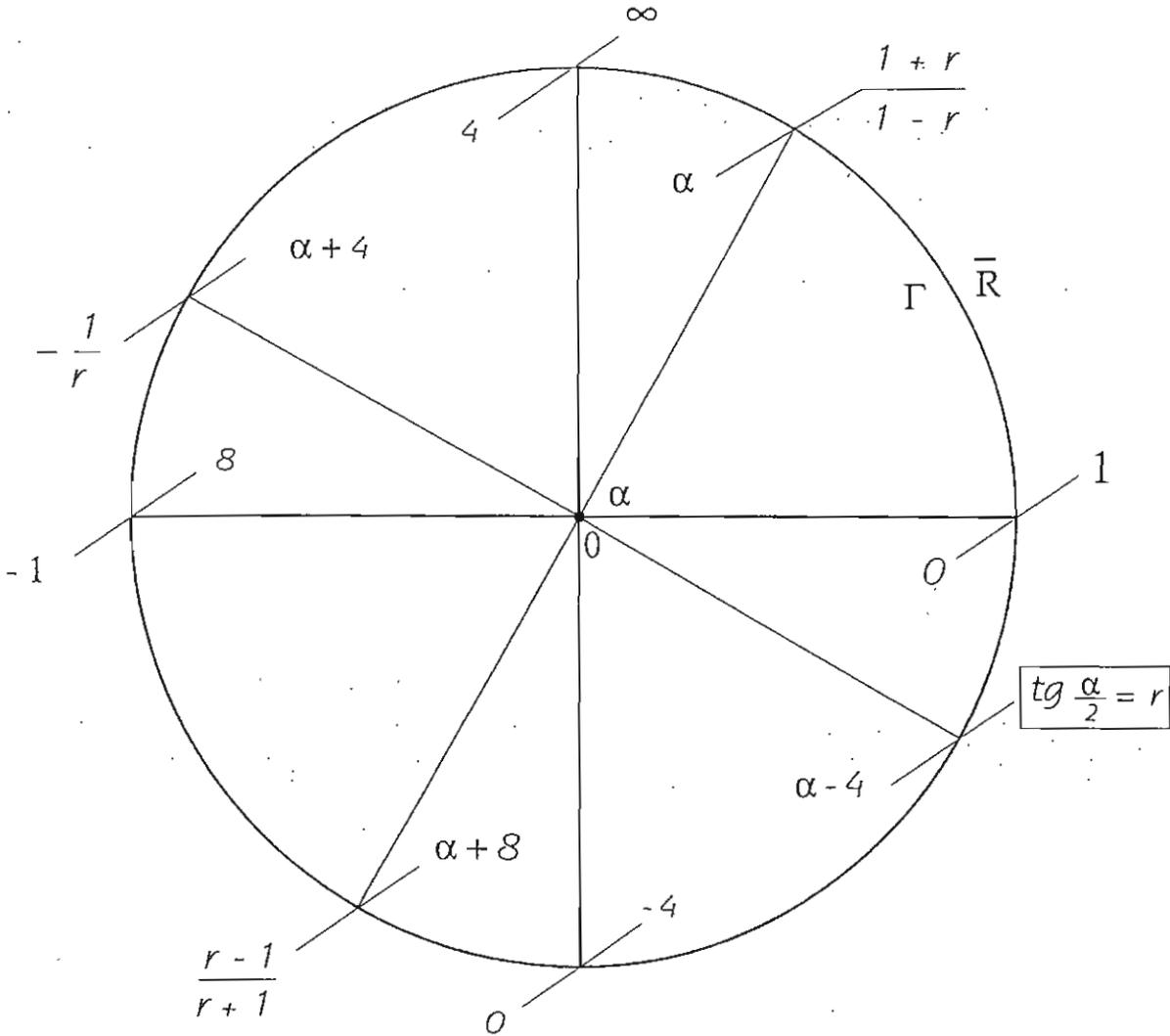
... entraînant la diamétrale opposition

r

□

Addition angulaire, rotation, multiplication complexe, homographie réelle en $\Gamma, \bar{\mathbb{R}}$

La page précédente permet cette vue globale



Suivent trois expressions du quart de tour à gauche

Addition angulaire $+4 : \Gamma \rightarrow \Gamma : \xi \mapsto \xi + 4$

Multiplication imaginaire $i \cdot : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto iz$

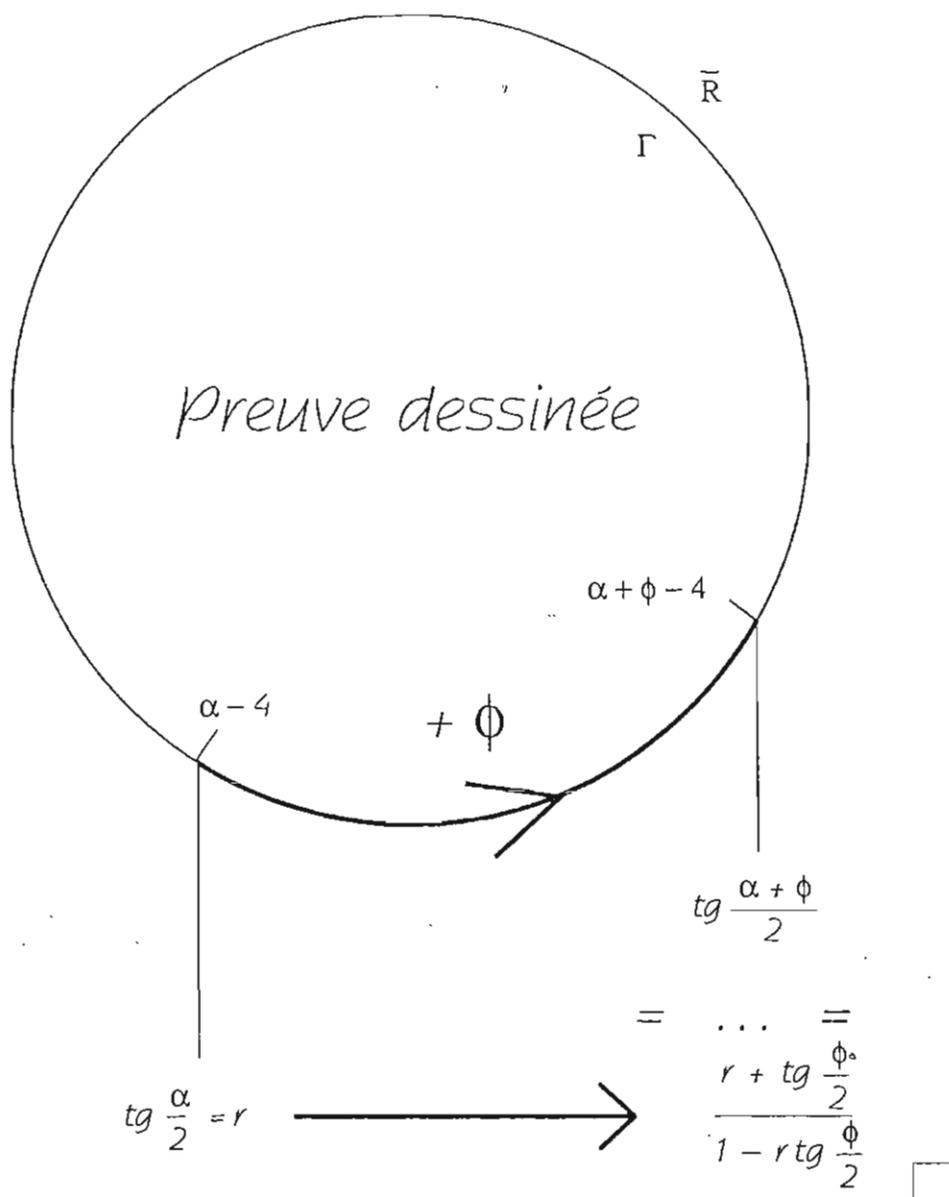
Homographie réelle $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : r \mapsto \frac{1+r}{1-r}$

et, plus généralement, trois expressions de la rotation d'angle ϕ

Addition angulaire $+ \phi : \Gamma \rightarrow \Gamma : \xi \mapsto \xi + \phi$

Multiplication complexe $\cdot e^{i\phi} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z \cdot e^{i\phi}$

Homographie réelle $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : r \mapsto \frac{r + \operatorname{tg} \frac{\phi}{2}}{1 - r \operatorname{tg} \frac{\phi}{2}}$ PREUVE \star



En vue de proche application, le formulaire fonctionnel circulaire se complète

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

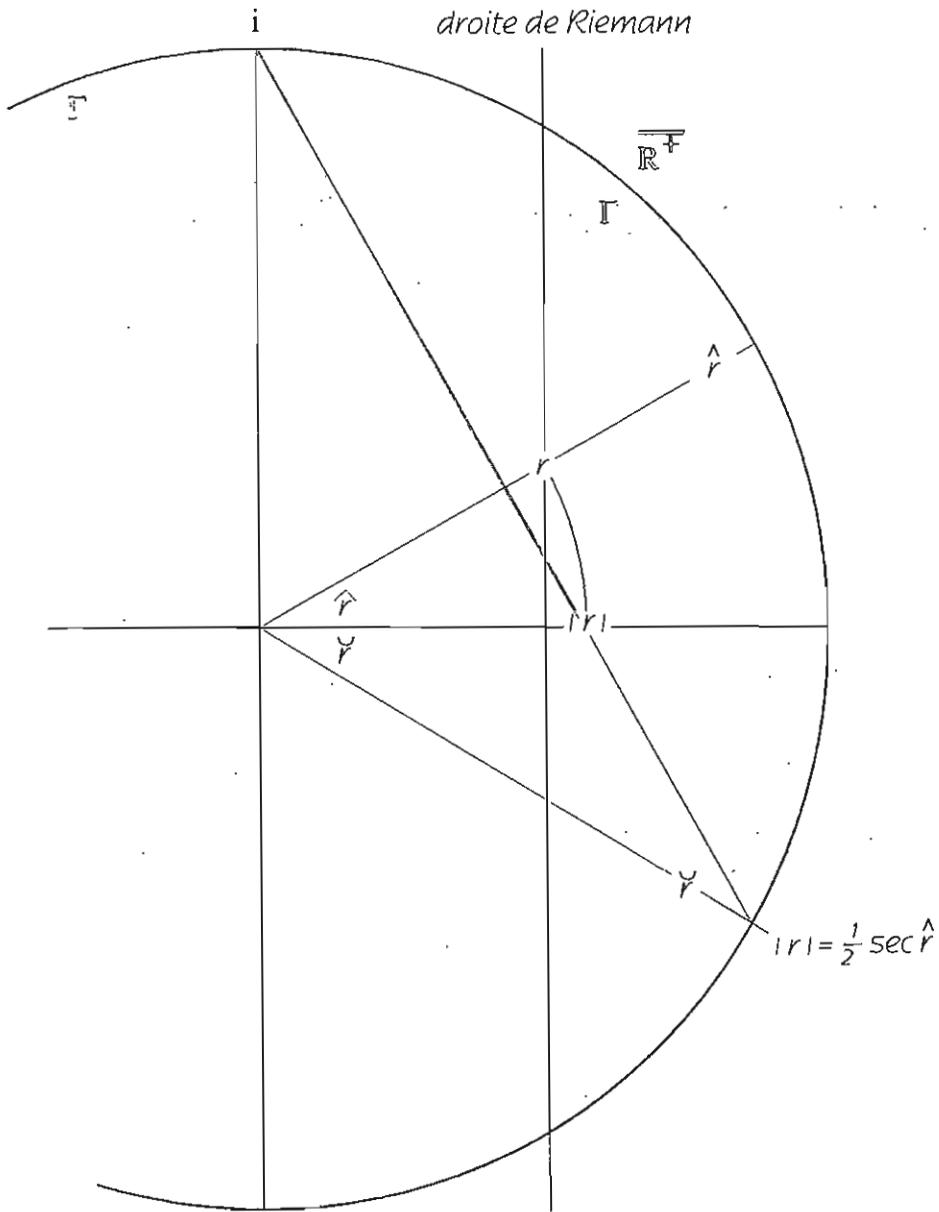
$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2 \text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{2 \text{tg } \frac{\alpha}{2}}{1 - \text{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \text{tg } \frac{\alpha}{2}}{1 + \text{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \text{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \text{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

□



En le repère cartésien introduit p 29, l'équation de la droite de Riemann s'écrit en un sériex très cartésien

$$x = \frac{1}{2} \text{ ou encore } \Re z = \frac{1}{2}$$

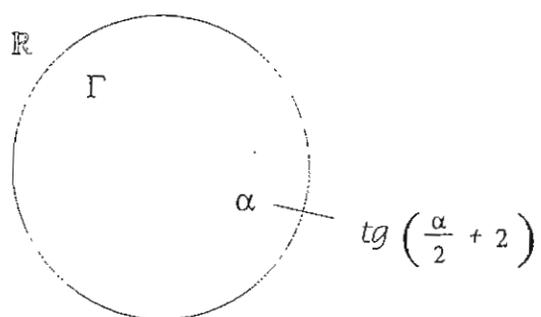
En le repère biangle $\wedge \smile$ introduit ci-dessus, l'équation de la droite de Riemann devient plus séductrice

$$\text{tg} \frac{\check{r}}{2} = \text{tg}^2 \frac{\hat{r}}{2}$$

PREUVE ↗

Preuve

Compte tenu de



la page précédente entraîne successivement